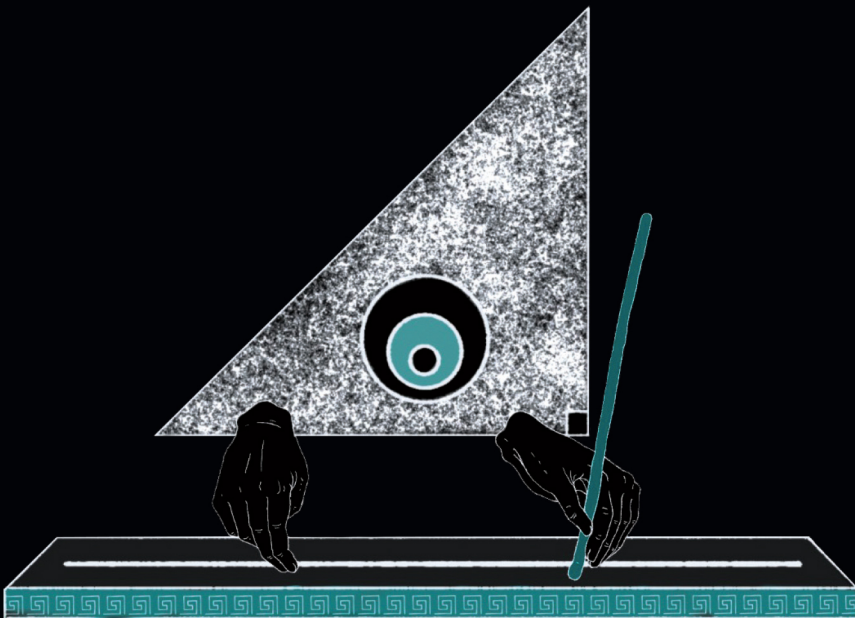


COLECCIÓN  
CIENCIAS Y  
HUMANIDADES  
PARA MÉXICO

# 10 teoremas para estimular tu creatividad

Juan Carlos Martínez García



**CONAHCYT**  
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES  
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

## **COLECCIÓN**

# **CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA MÉXICO**

El Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) difunde, a través de la colección Ciencias y Humanidades para México, obras de investigación científica y humanística que aportan conocimientos para el desarrollo y bienestar de nuestro país.

Las personas autoras, tanto nacionales como extranjeras, son profesionales y académicas altamente capacitadas en la investigación humanística y científica, dedicadas a la atención de las principales temáticas y los problemas prioritarios de México, así como del contexto latinoamericano.

Con la publicación de estos trabajos se conforma un corpus valioso, accesible para estudiantes de educación superior, así como profesionales especializados y no especializados. De igual forma, el público general podrá completar o enriquecer su formación mediante la lectura y el estudio de sus páginas.

Los libros de esta colección abordan cuestiones fundamentales y de interés, como salud, movilidad, soberanía alimentaria, migración, cambio climático, transición energética, educación, artes y literatura, y contribuyen al diálogo e intercambio de ideas sobre temas actuales que remiten a nuestras realidades.

De esta manera, el Conahcyt y el Fondo de Cultura Económica han unido esfuerzos para hacer de esta colección una muestra significativa de las visiones y los conocimientos que las y los expertos tienen respecto de algunos temas sobresalientes que hoy se debaten en México y América Latina.



# **10 teoremas**

para estimular tu creatividad

COLECCIÓN  
**CIENCIAS Y  
HUMANIDADES  
PARA MÉXICO**



Juan Carlos Martínez García

# 10 teoremas

para estimular tu creatividad



**CONAHCYT**  
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES  
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS



Instituto  
Mora

Primera edición, 2024

Martínez García, Juan Carlos

10 teoremas para estimular tu creatividad / Juan Carlos Martínez. – México :

Conahcyt, Instituto Mora, 2024

265 p. : ilus., figuras ; 23 x 17 cm – (Colec. Ciencias y Humanidades para México)

ISBN formato impreso: 978-607-8273-62-1

ISBN formato digital: en trámite

1. Teoremas 2. Matemáticas – Estudio y enseñanza 3. Matemáticas – Historia

4. Divulgación científica I. t. II. Ser.

LC QA135.5

Dewey 511.3 M334d



**CONAHCYT**

CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES  
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

***Distribución nacional***

© Juan Carlos Martínez García

D.R. © 2024 Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías  
Av. Insurgentes 1582, col. Crédito Constructor,  
Benito Juárez, Ciudad de México, CP 03940

D.R. © 2024 Instituto de Investigaciones Dr. José María Luis Mora  
Calle Plaza Valentín Gómez Farías 12, San Juan Mixcoac,  
Benito Juárez, Ciudad de México, CP 03730

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, la fotocopia o la grabación, sin la previa autorización por escrito del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías.

Esta publicación forma parte del proyecto “Plataformas de difusión científica: narrativas transmedia para México” del Instituto de Investigaciones Dr. José María Luis Mora, proyecto apoyado por el Conahcyt en el año 2024.

ISBN formato impreso: 978-607-8273-62-1

ISBN formato digital: en trámite

Hecho en México

***Distribución gratuita, prohibida su venta***

# Introducción

Querido lector, inicio este volumen agradeciendo sinceramente y de todo corazón que hayas decidido abordar su lectura. Muchas gracias. Deseo que encuentres en él un tiempo de calma y de esparcimiento; también espero que tu curiosidad quede satisfecha y, sobre todo, espero que tu creatividad sea estimulada. Ojalá y así sea. Por mi parte, yo me divertí escribiéndolo. Aproveché para ello los meses de estrés, tristeza, ansiedad y confinamiento involuntario que nos trajo la inesperada pandemia viral de los años 2020, 2021... y 2022.<sup>1</sup> Escribí las siguientes palabras cuando terminé la versión inicial de este libro, antes de someterlo al proceso de dictamen editorial, el 24 de agosto de 2021:

la pandemia aún sigue causando estragos, y en la Ciudad de México, donde resido, la tasa de contagio ha estado ligeramente al alza y por ello la ansiedad sigue presente. Afortunadamente he sido vacunado y eso me da cierta tranquilidad. En verdad que no deja de ser asombroso que en un tiempo tan corto se hayan logrado desarrollar vacunas efectivas contra el virus SARS-CoV-2. Una demostración impresionante de la capacidad de la ciencia contemporánea para abordar la resolución de problemas de gran complejidad. Lástima

---

<sup>1</sup> Quizás tendría que matizar lo que respecta al carácter contingente de la pandemia. Esto porque la degradación en curso del planeta, causada en gran medida por la demanda energética asociada al consumo de combustibles fósiles, aumenta la probabilidad de emergencia de pandemias virales. Existen sobradas evidencias que muestran que la aparición de nuevas enfermedades contagiosas de origen animal está asociada a regiones geográficas específicas donde las actividades humanas tienen lugar en un contexto de alta biodiversidad de vida silvestre, la cual implica una biodiversidad microbiana concomitante. La erosión acelerada de los equilibrios ecosistémicos, ocasionada por el crecimiento poblacional desmedido y la urbanización descontrolada, se traduce en el incremento del flujo de microbios patógenos hospedados por la fauna silvestre hacia la población humana. Desde esta perspectiva, aunque no se podía predecir, la pandemia ocasionada por el virus SARS-CoV-2, no es del todo inesperada. De no frenarse la incursión de la población humana en los territorios con alta biodiversidad de vida silvestre es de esperarse un incremento sustancial en la emergencia de pandemias virales con alcance global.

que este logro científico y tecnológico innegable se vea manchado por la sed de ganancia de las empresas farmacéuticas que monopolizan su desarrollo, lo cual ha limitado su disponibilidad para proteger a las poblaciones de los países pobres. Espero que la situación mejore en los meses que vienen y que todos podamos entonces deambular y convivir sin preocuparnos en demasía. Hacía tiempo que traía en mente lo que expongo en este volumen; sin embargo, por diversas razones, entre las cuales está mi enorme tendencia a procrastinar, no había hallado las condiciones adecuadas para materializarlo. Al inicio pensé en redactar una serie de artículos con fines de divulgación científica, aunque la interrupción que ha acarreado la pandemia en la actividad de muchas de las revistas dedicadas a dicha tarea me llevó a considerar la elaboración de este libro. Lo que presento es entonces el resultado de las diversas circunstancias específicas en las que he estado inmerso durante estos últimos meses, lo cual incluye haber elaborado este texto frente a una ventana a través de la cual he podido contemplar el ir y venir de colibríes y de ardillas entre la vegetación de un jardín precioso. He sido afortunado y lo agradezco.

Al día de hoy, 2 de septiembre de 2023, el contexto ha cambiado. Si bien la pandemia de la covid-19 ha amainado de manera notable, aún puede uno ver a algunas personas utilizando cubrebocas en el transporte público de la Ciudad de México, lugar donde resido, aunque gran parte del temor colectivo se ha reducido al mínimo. En lo que a mí respecta, me han puesto ya cuatro vacunas contra el virus SARS-CoV-2. No sé cuál sea la última, pues participo como voluntario en uno de los ensayos finales de la vacuna Patria en proceso de desarrollo bajo la responsabilidad del gobierno de México. Pude haber recibido dicha vacuna o bien otra de origen comercial, con respecto a la cual se establecerán las comparaciones debidas, pues el proceso de certificación de la vacuna en gestación exige la aplicación de un método de investigación científico doble ciego.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Es decir, el método de ensayo clínico en que ni los sujetos de experimentación ni los investigadores responsables conocen la identidad de los individuos asignados a cada grupo experimental. En este caso existen dos grupos: uno constituido por individuos a los que se asigna la vacuna experimental, y otro, denominado *grupo de control*, constituido por individuos que reciben una vacuna ya certificada y distribuida para uso en seres humanos. El método se justifica mediante técnicas matemáticas, de índole estadística, que tienen como finalidad asegurar que los efectos clínicos de la vacuna experimental sean reales y no resultado del azar.

Hasta aquí el contexto en el que retomé la reescritura del texto que dejé para el primer dictamen. Continuo entonces.

## ¿A QUÉ PÚBLICO ESTÁ DIRIGIDO ESTE LIBRO?

Aunque no concebí este libro como un divertimento, espero sinceramente que su lectura te sea divertida y que te ayude así a olvidar al menos en parte los infortunios del SARS-CoV-2. Con respecto al contenido, el presente volumen tiene la intención principal de alimentar la curiosidad de lectores interesados tanto en las matemáticas como en los modos específicos del pensamiento que se asocian a ellas, sin establecer para ello requisitos específicos de formación académica, de edad o incluso de intereses culturales. Espero que tú seas uno de esos lectores en los que pensé al escribir este volumen. Podría decir que el público ideal de este libro es el de aquellos que conservan la curiosidad como una de las características principales de su forma de ser y de existir, y que por ello encuentran por demás natural cuestionar el significado de las matemáticas en sus diversos aspectos. Esto no significa que no sea consciente del hecho de que lo que expongo aquí le sea más interesante a quienes han incursionado, aun con temor, en los territorios de las matemáticas. También espero que algunos que únicamente han percibido esos territorios desde los linderos se animen a recorrerlos y disfruten hacerlo. Esa es, pues, mi expectativa.

Cabe puntualizar que si bien no persigo aquí de manera prioritaria objetivos de índole educativa, pues este no es un libro de texto, espero que el contenido del presente volumen le sea también útil a maestros de matemáticas del nivel secundario y medio superior, para quienes responsabilizarse de la formación académica de adolescentes es un reto complejo y también magnífico. La elaboración de libros de corte netamente educativo es un asunto sumamente serio que le corresponde a especialistas, en este caso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. En mi caso, yo soy un científico centrado fundamentalmente en el uso y la construcción de conocimiento matemático y mi interés con este texto es compartir mi pasión por las matemáticas, sin pretenderme un experto en su aspecto educativo. Dicho esto, le he dado al contenido de este libro

un tratamiento de corte pedagógico, por lo cual he intentado, en la medida de lo posible, que los temas tratados en cada uno de los capítulos sean autocontenidos y que el material necesario para seguir cada demostración a los enunciados matemáticos que incluyo sea parte de sus propios preliminares. Aun tomando en cuenta lo anterior, te invito, querido lector, a complementar la lectura del material incluido mediante la consulta de otras fuentes que incluyo en la “Bibliografía recomendada”. Abordo este asunto más adelante (p. 19).

Creo necesario especificar que en este texto recurro al empleo genérico del masculino, o *género no marcado*, como lo denomina la *Gramática académica*, sin que esto suponga discriminación sexista alguna.

## ENTRANDO EN MATERIA

Este libro trata de *teoremas* y aquí se impone un paréntesis etimológico. La palabra teorema en español reproduce la palabra *θεώρημα* (fonéticamente: *theórema*) del griego antiguo. Fue acuñada hacia el siglo VI antes de nuestra era con base en el verbo *θεωρέω* (fonéticamente: *theoréo*), que significa “analizar con atención y detenimiento”. Etimológicamente hablando, teorema significa, en el contexto matemático y filosófico, “el resultado de observar, reflexionar y analizar con atención y detenimiento el resultado de una demostración lógica”.

Así pues, aunque este libro trata de teoremas, lo más importante son las demostraciones, e invito a aceptarlas como un juego. En cada caso que abordo, he incorporado algunos apuntes históricos, sociales y sobre todo culturales. Mi intención, al hacerlo, es ubicar la génesis del conocimiento matemático inscrito en el contexto que le es propio y con ello contribuir a su desmitificación. Esto para reiterar una y otra vez que *no existe el conocimiento científico sin un contexto también específico*.

Los modos específicos que adopta el conocimiento científico reflejan las circunstancias históricas, sociales y culturales en las que se gesta; más aún: como veremos posteriormente, la personalidad misma del matemático es en gran medida un constructo social. Esto lo he resaltado a todo lo largo del texto mediante la presentación de recuadros temáticos

concebidos como ensayos ligeros, limitando su extensión. Concebí estos recuadros temáticos como una suerte de paréntesis en la lógica de la exposición, para hacerla menos árida y, ante todo, para invitar al lector a *reflexionar en torno a las circunstancias socioculturales e históricas, e incluso psicológicas, que condicionan los procesos de construcción del conocimiento.*

En cierto sentido, este libro es un ensayo centrado en elucidar, por medio del cuestionamiento reflexivo, algunos de los aspectos que caracterizan a lo matemático con lo que nos define como humanos. No he intentado elaborar aquí un manual para demostrar teoremas. He dejado conscientemente que el contexto, tanto aquel que subyace a la forma que toma el conocimiento matemático como el que me corresponde como persona, se manifieste a través de mis palabras. Espero que el lector aprecie esta invitación.

## VERIFICABILIDAD DE LO QUE SE EXPONE

Tal y como lo he expresado antes, en este volumen incluyo las fuentes de información de las que me he servido de manera directa en el cuerpo del libro. En cuanto a los 10 teoremas incluidos, las demostraciones que los acompañan proveen el mecanismo de verificación lógica de lo que se ha afirmado, tal cual se debe proceder al tratarse de enunciados lógicos que se sirven del razonamiento hipotético-deductivo como criterio de validez. A ese respecto siento que no debe de presentarse ninguna clase de controversia. En cada caso expongo las circunstancias históricas y socioculturales que subyacen a los enunciados lógicos.

En cuanto al material que acompaña a los teoremas en cada uno de los capítulos que les conciernen, así como en esta “Introducción”, en la “Motivación”, en los “Conceptos preliminares”, en los “Comentarios finales” y en la “Bibliografía recomendada”, las afirmaciones que formulo sin especificar fuentes específicas de información son de mi entera responsabilidad. Debido a que he concebido este libro como un ensayo, por ende expositivo-argumentativo, mis argumentaciones deben sostenerse por sí mismas. Esa es, pues, mi intención. Seguramente más de uno de mis argumentos será motivo de debate, lo cual me parece sano. No siento que

sea necesaria la coincidencia perfecta entre autores y lectores para establecer un diálogo provechoso.

## SOBRE EL TÍTULO DE ESTE LIBRO

En cuanto al título de este libro, inicialmente consideré *La gloriosa rebelión de los irracionales*, atreviéndome al lirismo. Esto sabiendo muy bien que le podría resultar incómodo a más de uno y así fue. Se me ocurrió ese primer título para establecer como punto de partida la reflexión sobre lo que significó en la ya larga historia de las matemáticas el descubrimiento de los *números irracionales* en los tiempos de la Antigua Grecia (1200 a.C.–146 a.C.). Conviene recordar aquí que tales números son aquellos que *no* se pueden escribir en términos de fracciones formadas por el cociente de números enteros. Fracciones tales como éstas:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \dots,$$

pertenecen al conjunto de los *números racionales*, al igual que el cero y todos los números enteros positivos y también los negativos. Dicho descubrimiento fue una auténtica rebelión del pensamiento que potenció en Occidente la consolidación de la geometría en detrimento del álgebra como terreno de predilección de los métodos de construcción del conocimiento matemático. Esto lo podemos enunciar a la luz de lo que hoy se sabe sobre su evolución. La preeminencia de la geometría queda de manifiesto en el célebre y aún hoy en día sorprendente tratado de los *Elementos*, elaborado por el matemático Euclides en Alejandría, en el Egipto ptolemaico, hacia el año 300 antes de nuestra era. Dicho texto, considerado en general como la referencia fundamental en lo que respecta a la génesis del razonamiento matemático, es en sí el primer tratado dedicado a la geometría, entendida como un territorio idealizado que se explora mediante el razonamiento abstracto. En lo que respecta al presente libro, el razonamiento matemático de corte geométrico también prevalece. La propuesta original del título no se hizo con una intención de índole mercadotécnica. La idea de servirme del término “rebelión” tuvo como propósito invitar al lector a reflexionar en el hecho de que la construcción

del conocimiento matemático no es ni un proceso estático ni tampoco un proceso gradual. Las revoluciones y las rebeliones han estado presentes a todo lo largo de su historia y uno puede percibirlas en la forma misma que toman los teoremas y sus demostraciones respectivas. Mediante el título *La gloriosa rebelión de los irracionales* quise rendir homenaje a quienes en la antigüedad dejaron la comodidad de cuantificar su entorno a través de cantidades representadas mediante cocientes de longitudes finitas de cuerdas, esto es mediante el uso de los números racionales; lejos de ello, se rebelaron y se entregaron así a la pasión de conocer algo nuevo. La gloria fue su justa recompensa. Al modificar el título de este escrito decidí priorizar mi intención original: estimular la creatividad del lector. Para alcanzar tal objetivo no sólo expongo los teoremas escogidos y sus demostraciones correspondientes, sino que también me permito resaltar a lo largo de este volumen lo que las matemáticas significan en la cultura occidental, dejando bien en claro que lo que expreso es ante todo mi visión personal. Esto no significa que no respete en la exposición del material técnico el rigor que exige el razonamiento matemático.

## ASPECTOS TÉCNICOS

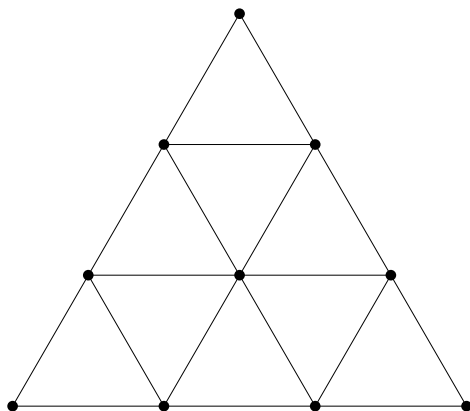
En lo que respecta a los aspectos propiamente técnicos de lo que expongo, he evitado conscientemente y en la medida de lo posible el uso de operaciones algebraicas, aunque no siempre lo he logrado, lo cual en verdad lamento. Con ello he tratado de prevenir la aversión que numerosos lectores de textos de índole matemática suelen sentir ante el enfoque explicativo basado en la ejecución de tales operaciones, aquellas que hacen intervenir símbolos abstractos y que suelen despertar la ansiedad en más de uno y cuyo manejo sigue siendo un dolor de cabeza para muchos. Al realizar operaciones algebraicas siempre existe la posibilidad de cometer errores, y en gran medida eso es lo que genera la ansiedad y la aversión hacia ellas. Por ello sostengo que la abstracción de índole geométrica tiene ventajas claras sobre la de índole algebraica, al ofrecer un modo de razonamiento matemático menos doloroso y por ello más apto para darle oportunidad a lo lúdico en los procesos de aprendizaje.

He incluido en el primer capítulo las motivaciones que me han guiado al escribir este texto. Estas se resumen en mi intención primordial de ilustrar los modos de razonamiento que se siguen en la construcción del conocimiento tildado como matemático, el cual anclo a lo largo de este volumen en las circunstancias socioculturales que subyacen a la utilidad pública de las matemáticas. Aunque los métodos de razonamiento a los cuales hago referencia no le son exclusivos al mundo de las matemáticas, es en su contexto como se potenciaron históricamente sus posibilidades, que terminaron por darle forma a la ciencia moderna como logro máximo de la agenda de los pensadores europeos del *Siglo de las Luces*.<sup>3</sup> En los siguientes capítulos, abordo la demostración de diez teoremas matemáticos, dedicando un capítulo a cada uno de ellos.

### ¿POR QUÉ DIEZ TEOREMAS?

Podrían haber sido más o menos teoremas, aunque 10 me pareció un buen número. Puede ser que en mi subconsciente se manifestara una evocación a la *tetraktys* de los pitagóricos que se muestra en la figura 1, aunque también puede ser que la razón estribe en que nos es fácil contar hasta diez porque solemos hacerlo utilizando para ello los dedos de nuestras manos... ¡Vaya uno a saber! A los matemáticos mayas de la antigüedad les pareció de lo más normal servirse de un sistema de numeración con base en el número veinte, agregando a los dedos de las manos los de los pies. En cuanto a los babilonios, preferían contar hasta doce utilizando para ello los tres segmentos de los cuatro dedos de la mano que poseen tres falanges. El pulgar, que cuenta únicamente con dos falanges, se utilizaba para realizar el conteo desplazando su extremidad por los segmentos de los otros dedos.

<sup>3</sup> Movimiento filosófico, literario y cultural europeo, que tuvo lugar entre 1715 y 1789, básicamente en Francia, Inglaterra y Alemania. Propuso superar el oscurantismo, promover el conocimiento y la tolerancia, combatiendo para ello la superstición, oponiéndose al poder clerical y desacralizando el poder monárquico. También conocido como la *Era de la Razón* o simplemente como la *Ilustración*. Este movimiento provino del esfuerzo de pensadores de élite pertenecientes, en general, a las capas altas de las sociedades aristocráticas europeas. La emergencia de la Revolución francesa (5 de mayo de 1789–9 de noviembre de 1799); promotora inicialmente de un radicalismo igualitario, significó el fin del Siglo de las Luces y con ello de su perspectiva social elitista.



**Figura 1.** La *tetraktys*.

Esta figura, consistente en 10 puntos ordenados en 4 renglones (un punto en el primero, dos puntos en el segundo, tres en el tercero y cuatro puntos en el cuarto), representa al cuarto número triangular (los números triangulares son números figurados que se presentan mediante triángulos equiláteros). Para la escuela pitagórica, fundada por Pitágoras en la Antigua Grecia en el siglo VI antes de nuestra era, esta figura tuvo un significado místico.

Se servían de ella para representar el concepto de *la totalidad*.

Regresando a los teoremas que abordo en este libro, en cada caso explico el porqué de su interés. En lo que sigue introduzco brevemente lo que concierne a cada uno de ellos.

Inicio el recorrido con la conocida declaración matemática que establece la mecánica para calcular lo que resulta al sumar todos los elementos de una sucesión finita de los primeros números enteros naturales ordenados de menor a mayor, comenzando por el número 1. A este primer teorema le sigue la declaración que define la propiedad principal de los números racionales; esto es, el hecho *demostrable* de que son representables mediante el cociente de dos números enteros, para formar lo que se denomina una *fracción irreducible*. Esto me permite abordar después, en el tercer teorema, la demostración de la naturaleza irracional de la raíz cuadrada del número 2, número al que se representa –como es costumbre en prácticamente todos los textos de matemáticas contemporáneos– mediante la conocida notación  $\sqrt{2}$ .<sup>4</sup> La irracionalidad de  $\sqrt{2}$  marcó

<sup>4</sup> Para ser más precisos, lo más conveniente sería representar la raíz cuadrada de un número,

históricamente la emergencia de lo *incommensurable* como propiedad fundamental de ciertos objetos geométricos, asociándola en este caso a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son idénticos y de longitud unitaria. En el recuadro 1 (p. 17) expongo la relación entre la emergencia de los números irracionales y el concepto de revolución científica. Así, comienzo también con la inclusión de los recuadros complementarios.

Después de tratar en el tercer teorema la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  –que es, en notación decimal:

1.41421356237309504880168872420969807856 ...

y así hasta el infinito inconmensurable... y más allá–,<sup>5</sup> procedo en el cuarto teorema a presentar una demostración visual del célebre *teorema de Pitágoras*, lo cual me permite argumentar en torno al elusivo y subjetivo concepto de *elegancia* en el ámbito de las matemáticas.

Dedico el quinto teorema a demostrar el hecho de que la raíz cuadrada del número  $2 - \sqrt{2}$ , como hemos visto– es una constante asociada a la estructura de los triángulos rectángulos isósceles, lo cual me permite exponer el significado del concepto de *invariancia* en el contexto de las matemáticas. Esta es una noción poderosa que, comprendida en términos de propiedades de objetos matemáticos que permanecen sin cambio ante ciertas clases de transformaciones, introduce el concepto de *esencia estructural* de las familias de objetos matemáticos.

Utilizando el teorema de Tales y el de Pitágoras presento después la declaración matemática que establece la relación entre la *media geométrica* y la *media aritmética* de dos números positivos, que corresponden a dos maneras de cuantificar un número que represente al par involucrado. Junto con la demostración del sexto teorema aprovecho la ocasión para recorrer algunos de los conceptos que subyacen en el uso de las *medias pitagóricas* en el ámbito de la música académica occidental, centrándome

digamos  $x$ , mediante  $\sqrt[n]{x}$ . En general se utiliza la notación  $\sqrt[n]{x}$  para representar la  $n$ -ésima raíz del número  $x$ . Por ejemplo, la raíz cúbica del número entero 27 se representa como  $\sqrt[3]{27}$ , que corresponde al número entero 3. En efecto,  $3 \times 3 \times 3 = 27$ .

<sup>5</sup> Como diría el juguete que lleva el sobrenombre del segundo hombre que caminó en 1969 sobre la superficie lunar y quien es hasta ahora y por mucho mi astronauta favorito: Edwin Eugene Aldrin Jr., *Buzz Aldrin*.

**Recuadro 1.** ¿La emergencia de los números irracionales como revolución científica?

La noción de *revolución científica* es un producto neto de las reflexiones intelectuales que alcanzaron su madurez durante la década de los años sesenta del siglo pasado. Fue propuesta por el estadounidense Thomas Samuel Kuhn, quien postuló que las ciencias –así, en plural– progresan mediante la aparición de nuevos *paradigmas*. De acuerdo con él, un paradigma designa los compromisos compartidos por una comunidad de científicos; la emergencia de nuevos paradigmas es catalizada por la insatisfacción de una parte de esa comunidad en lo que respecta a la utilidad de los vigentes. La instauración de los nuevos renueva los compromisos. Al considerar las implicaciones del descubrimiento de los números irracionales surge la tentación de afirmar que trajo como consecuencia una revolución científica en las matemáticas de la Antigua Grecia. Sin embargo, esto no fue así, debido a que no existía una comunidad científica como tal, sino individuos dedicados a exploraciones de lo matemático en intersección con la indagación filosófica. La propuesta de Thomas Samuel Kuhn requiere que la ciencia esté institucionalizada, lo cual no aconteció en la Antigua Grecia. Hoy en día la noción de revolución en la ciencia está siendo reemplazada por el concepto de *evolución de la ciencia debida a procesos autoorganizados*, que, entre otros aspectos, debilita la noción misma de progreso y se traduce en términos sociales en la consolidación de comunidades científicas altamente especializadas, un fenómeno que recuerda al de la especiación en biología. El descubrimiento de los números irracionales habría entonces participado de un proceso de adaptación del conocimiento a las restricciones de la época, entre las cuales se encuentra la formulación en términos geométricos de las cuestiones matemáticas, la instauración del razonamiento hipotético-deductivo y la minimización del uso del álgebra por sus limitantes operacionales.

en el concepto de la *quinta perfecta*, que se utiliza en procesos de composición musical.

Posteriormente, y dada su trascendencia en la historia de las matemáticas, no podía dejar pasar sin considerar la intrigante familia de los *números primos*, por lo que incluyo como séptimo teorema la declaración matemática que establece el hecho de que todo número entero puede factorizarse en términos del producto de números primos: éste es el célebre *teorema fundamental de la aritmética*. Los números primos fueron percibidos en la antigüedad como una suerte de átomos abstractos, componentes esenciales del resto de los números enteros.

El octavo teorema lo dedico al conocido hecho de que en geometría euclidiana (esa que idealiza el espacio en el que transcurre nuestra existencia), la suma de los ángulos de todo triángulo es constante e igual a  $180^\circ$ . Esto me permite discutir la complejidad cognitiva asociada a lo que se percibe como *evidentemente cierto*, asociado en matemáticas a la noción de *axioma*, ilustrada con el problemático postulado euclidiano de las paralelas, también conocido como el *quinto postulado de Euclides*.

En fin, para los últimos dos teoremas que incluyo en este libro he seleccionado, como noveno teorema, el hecho, *demostrado de manera irrefutable*, tal y como se debe en matemáticas, de que hay únicamente *cinco poliedros regulares convexos*; y, como décimo teorema, lo que Arquímedes consideró como su *obra maestra*: la demostración mediante nociones de origen mecánico de que *la esfera inscrita en un cilindro ocupa dos tercios del volumen de éste*. El seguimiento de las demostraciones de las dos últimas declaraciones implica un esfuerzo mayor que el que se requiere para las ocho previas. Espero que el lector acepte con gusto el desafío.

La demostración asociada a los poliedros, el noveno teorema presentado en este libro, la abordo desde la perspectiva de la teoría de grafos. Esto provee un ejemplo para mostrar la importancia del papel que desempeñan las restricciones impuestas por la información asociada en las propiedades de objetos matemáticos. Esto me permite ilustrar cómo la trayectoria de la abstracción nos puede llevar de lo físico a lo geométrico y de allí a la información pura, en el proceso de aprehensión de lo matemático.

En cuanto a la obra maestra de Arquímedes, décimo y último teorema incluido en este libro, presento la demostración siguiendo la metodología *mecanicista* que él propuso. Esto lo hago como un sincero homenaje a su memoria y como una invitación que le extiendo al lector para dejarse ir en el placer que da la exploración de lo matemático, inspirado quizás en las emociones que puede despertar en nuestra mente la lectura de la obra de Arthur Rimbaud, poeta simbolista francés del siglo XIX, cuando nos dejamos llevar por el gozo de lo que nos ofrecen los nuevos senderos.

## FUENTES BIBLIOGRÁFICAS Y LIGEREZA EN LA EXPOSICIÓN

Menciono aquí que, para facilitar la lectura de lo que someto a la consideración del lector, evité saturar los capítulos con citas bibliográficas, lo cual no significa que renuncie con ello a la verificabilidad del conocimiento matemático, que expongo como uno de sus atributos fundamentales y también indispensables. En lugar de eso indico la fuente pertinente de la información directamente en el texto, aunque evito conscientemente la exhaustividad cada vez que lo juzgo necesario. Me permito esta libertad para evitar que el texto crezca en demasía y también porque he decidido que este volumen no se inscriba en la lógica del academicismo a ultranza, dejando que reine en la exposición la ligereza.

En general, para fundamentar esta obra me baso en información bibliográfica confiable que está disponible en una gran cantidad de libros, así como en diversos artículos científicos y también en varios sitios web, incluyendo entre ellos:

- la Wikipedia (<https://www.wikipedia.org/>);
- la Enciclopedia Británica en línea (<https://www.britannica.com/>);
- la Enciclopedia de Matemáticas de la Sociedad Europea de Matemáticas (<https://encyclopediaofmath.org>).

Seguramente el lector curioso hallará más fuentes de información recorriendo los inconmensurables territorios de internet.

Después del último teorema agrego un capítulo dedicado a recomendar algunas fuentes bibliográficas que complementan lo que expongo en este volumen. Para este fin, he incluido sólo aquellas obras que me parecen pertinentes y que espero le sean de interés al lector. Asimismo, incluyo, además del índice de materias de rigor, un índice onomástico de los matemáticos, filósofos, científicos y otros personajes que menciono en la obra, para los cuales he anotado en la medida de lo posible sus lugares y fechas de nacimiento. Esto con la expectativa de permitir al lector ubicar con precisión lo que asocia a esos seres humanos concretos con sus circunstancias históricas y socioculturales.

Finalmente, para estar al tanto de las herramientas digitales de edición y de tipografía que utilicé para elaborar este manuscrito, incluyendo las diversas figuras que he incluido, el lector curioso puede disponerse a leer el recuadro 2.

No podría terminar esta introducción sin agradecer a quienes estimulan permanentemente mi curiosidad:

Gracias Anaïs, gracias Val, mis dos radicales.  
Les dedico este libro con amor infinito.

Ciudad de México, mayo de 2024.

**Recuadro 2.** Herramientas de edición y tipográficas utilizadas

Para la elaboración de este volumen me he servido del sistema público de composición digital  $\text{\LaTeX}$ , diseñado por el matemático estadounidense Leslie Lamport a partir del programa informático de tipografía  $\text{\TeX}$ , concebido por el célebre matemático y científico de la computación, también estadounidense, Donald Ervin Knuth, originalmente lanzado en 1978 (¡hace más de cuarenta años!) y que hoy en día se encuentra en la versión 3.14159265, sin cambios desde enero del año 2014. Espero que el lector curioso disfrute este guiño a la noción de *trascendencia* en el sentido matemático. Este sistema informático de edición se ha convertido en un estándar internacional para la elaboración de textos de índole matemática, gracias a la colaboración de un gran número de seguidores que se comunican en nuestros días mediante internet y que le agregan de manera permanente nuevas funcionalidades. Para facilitarme la tarea de edición utilicé OVERLEAF (<https://www.overleaf.com>), el editor colaborativo para  $\text{\LaTeX}$  disponible en la nube informática. En cuanto a las imágenes mostradas en este volumen, las elaboré utilizando la herramienta de producción de gráficos vectoriales PGF/TikZ, desarrollada y soportada, con base en macros de  $\text{\TeX}$ , por el especialista alemán en informática teórica Till Tantau, entre 2005 y 2016, y por el físico Henri Menke a partir de 2019; el paquete tikz-3dplot, actualmente bajo la responsabilidad del tecnólogo Jeffrey D. Hein, me fue también de gran utilidad para la elaboración de las imágenes. Estas son, pues, las herramientas de composición tipográfica de las que me he servido profusamente. Afortunadamente vivimos en una época en la que tenemos a la mano herramientas informáticas de edición que hasta hace unos pocos años eran impensables.



## Motivación

Como tema de reflexión, las matemáticas son a la vez apasionantes y también un asunto algo problemático. ¿Por qué afirmo esto? Me explico. Las matemáticas son apasionantes porque constituyen hoy en día no sólo un dominio importante de la ciencia —un dominio quizás excesivamente sacralizado—, sino ante todo porque son *un hecho cultural significativo*. ¿Qué quiero decir con esto? Gracias a las matemáticas —como concepto y ante todo como institución—, se manifiestan ciertos imaginarios culturales; esto es, elaboraciones simbólicas que la sociedad edifica para orientarse ante lo que se reconoce socialmente como lo real: lo que se contrapone socialmente a lo que se califica, también socialmente, como únicamente imaginario. Para comprender algo nos servimos entonces de la imaginación, y con ello fijamos las fronteras entre lo que reconocemos como perteneciente a lo real, en sus diversas manifestaciones, y aquello que no le pertenece, lo que se nos presenta —esto es, lo que representamos— sólo como producto de nuestra imaginación. Este proceso cognitivo y también social lleva necesariamente a cuestionar lo que define y da forma y sustancia a tales fronteras. Comprender al detalle cómo se traza una frontera específica entre lo real y lo imaginario es también comprender lo que está siendo delimitado por ésta. Así, para comprender algunos aspectos importantes de la estructura social requerimos explorar la relación que guardan las matemáticas con los imaginarios culturales, a fin de poner en claro cómo las dinámicas sociales condicionan los modos de ser de lo matemático y viceversa, lo cual me parece en verdad apasionante.

Ahora bien, ¿por qué considero que las matemáticas constituyen también un asunto problemático? La razón estriba en que ciertas patologías sociales, tal y como la que coloca a las mujeres bajo la dominación masculina, se nutren de ciertos imaginarios culturales asociados con las

matemáticas. Puede sonar exagerado, aunque no lo es. Explorar las consecuencias sociales de la interacción entre las matemáticas y la imaginación obliga a no volver la mirada y aceptar que éstas, como todo dominio científico, puede tener aspectos intrínsecamente negativos. Como mostraré más adelante, las matemáticas poseen una significación cultural valiosa que merece ser protegida y promovida, lo cual hace necesario corregir los aspectos socialmente negativos que participan de su estructura institucional.

Hay mucho de imaginación altamente estructurada en el conocimiento matemático, y hay muchos imaginarios culturales que nacen precisamente del uso de las matemáticas como herramienta para darle forma a ideas asociadas a la estructura del universo social. Una de estas elaboraciones simbólicas es la que asocia a quienes se dedican profesionalmente a la construcción de conocimiento reconocido como matemático con una supuesta capacidad de elucidar los misterios que se ocultan tras las apariencias de lo real. Esta asociación entre las matemáticas y “el misterio” potencia a lo que más tarde denominaré como *la tentación mística en matemáticas*. Aunque muy importante, tal imaginario cultural es sólo uno de los que se sirven de las matemáticas para sustanciar complejas dinámicas sociales que pueden ser en parte comprendidas mediante el análisis crítico de la relación que guardan las matemáticas con el cuerpo social. ¿Qué nos dice la comprensión de lo que significa la tentación mística sobre la acumulación de capital simbólico por parte de los matemáticos profesionales y su subsecuente adquisición de privilegios sociales? Esta es la clase de cuestionamientos cuya respuesta puede explorarse comprendiendo la relación entre las matemáticas y los imaginarios culturales. Reiterando, mediante tal comprensión, que entraña aspectos tanto científicos como cognitivos y socioculturales, podemos aprender mucho de lo que nos caracteriza como sociedad y como individuos, y es preciso este aprendizaje para articular estrategias virtuosas de cambio social. Esta ha sido, pues, mi motivación principal para elaborar este manuscrito.

En lo que sigue abordo lo que percibo como el impacto cultural de las matemáticas, haciendo hincapié en su papel en el encauzamiento del imaginario social que ubica al razonamiento abstracto de corte hipotético-

deductivo en una posición de privilegio; lo cual, como se verá, es de suma importancia aunque no siempre resulta ser conveniente.

## LAS MATEMÁTICAS Y SU IMPACTO CULTURAL

Me es importante insistir aquí en el hecho de que el impacto cultural de las matemáticas va mucho más allá de su gran valía en todos los ámbitos de la ciencia y de la tecnología. Para la sociedad contemporánea las matemáticas no son únicamente importantes porque nos proveen herramientas metodológicas útiles para la comprensión de los principios que subyacen a la ocurrencia de fenómenos complejos de gran interés científico y sobre todo social, fenómenos tales como los que involucran:

- el preocupante cambio climático de nuestro planeta como consecuencia de la actividad humana desde el advenimiento de la era industrial en Occidente;
- las dinámicas sociales que subyacen a los resultados de los procesos electorales;
- las consecuencias económicas y socioculturales de la migración;
- el diseño de trayectorias óptimas de vuelos comerciales en los sistemas de tráfico aéreo;
- la mejora de la precisión en la representación de estructuras internas del cuerpo humano con equipos y procedimientos especializados de imagen médica;
- el diseño y puesta a punto de tecnologías complejas, tales como las que hacen posible la construcción de centrales de producción de energía eléctrica a partir de la fisión atómica o la manufactura de vacunas efectivas;
- el desarrollo de sistemas informáticos avanzados capaces de detectar con precisión el perfil de consumo de bienes y servicios por parte de los usuarios de las redes sociales, esto es, las mal llamadas *inteligencias artificiales*;

- la simulación visualmente realista del movimiento del cuerpo humano en el cine y en los juegos de video;
- la relación que guarda el estilo de vida de las personas con la emergencia de las enfermedades crónico-degenerativas que las afectan;
- la evolución espaciotemporal de las pandemias virales;

por dar algunos ejemplos que me parecen pertinentes por su gran interés societal. Seguramente el lector podrá elaborar su propio listado en función de sus propios intereses y prioridades. La comprensión profunda de los principios fundamentales que subyacen a los fenómenos involucrados en cada uno de los ejemplos listados precedentemente requiere el uso adecuado de métodos de análisis que se formulan matemáticamente, *porque así conviene hacerlo*. Dichos métodos permiten enunciar en términos lógicos el conocimiento existente en torno a los fenómenos participantes, así como encauzar la formulación de los cuestionamientos que potencian la construcción de nuevo conocimiento que les está asociado y, en su caso, guiar el desarrollo de soluciones tecnológicas a problemáticas de gran importancia.

Sí, sin duda las matemáticas son socialmente útiles porque se pueden utilizar con gran éxito para resolver problemas sociales. ¿Quién podría dudarlo? La utilidad práctica de las matemáticas es por demás obvia. En el caso de la pandemia viral debida al virus SARS-CoV-2, que ha afectado a gran parte la población humana desde su aparición en la República Popular China en el año 2019, las matemáticas han desempeñado un papel importante en la comprensión de los riesgos epidemiológicos, proveyendo medios cuantitativos y cualitativos para la reorganización de las sociedades con la finalidad de atenuar las consecuencias negativas sobre los sistemas de provisión de servicios médicos. En este caso el uso de las matemáticas ha permitido determinar la proporción de una población sana que debe ser vacunada para detener los contagios, lo cual reduce los costos de vacunar a toda la población. En este ejemplo de gran actualidad, al igual que en otros, el instrumental de análisis proporcionado por las matemáticas ha sido indispensable en el proceso de toma de decisiones por

parte de los agentes políticos responsables. Sin embargo, y pese a su gran importancia, *no es la aplicabilidad del conocimiento matemático lo que le da su significación cultural más profunda a las matemáticas*. Ésta es más sutil. Más allá del utilitarismo, esta significación proviene del hecho de que, *en asociación con las matemáticas, se encauza un imaginario social que le ha dado gran valía a ciertos modos del razonamiento centrado en la abstracción; esto en detrimento de otras formas de pensar*.

Con esto quiero hacer hincapié en que para la sociedad actual las matemáticas no son únicamente una herramienta valiosa, sino que constituyen ante todo una *institución social*,<sup>6</sup> tanto real como simbólica, con manifestaciones concretas y diversas que le son propias, entre las cuales se incluyen las académicas y las escolares. Entonces, ¿por qué son culturalmente significativas las matemáticas? Lo son porque *las matemáticas constituyen una institución importante que salvaguarda las potencialidades del pensamiento abstracto*.

Esta es, pues, la característica fundamental de las matemáticas, que las distingue del resto de las instituciones sociales. En esto, como institución esencialmente simbólica, las matemáticas se han distanciado de manera notable de las otras ciencias, y han adquirido un estatus social privilegiado, nutrido por los excesos en los que ha incurrido la imaginación colectiva al dotarle de atributos que han conferido a los matemáticos profesionales una posición social privilegiada.

Desafortunadamente este privilegio, que se pretende únicamente virtuoso, no está exento de desviaciones profundamente negativas. Esto debido a que en algunos aspectos el estatus social privilegiado de las matemáticas guarda cierta similitud con el que poseen en la sociedad contemporánea ciertos cultos religiosos.

Sé bien que esta aseveración no será del agrado de algunos lectores, en especial de aquellos que consideran que las matemáticas constituyen el templo por antonomasia del dominio de la razón en la construcción del conocimiento. Sin embargo, la sostengo. En los siguientes párrafos abordo este aspecto de la relación que guardan las matemáticas con la vida

<sup>6</sup> En tanto que institución social, las matemáticas se presentan como un conjunto de creencias, normas, actitudes y prácticas, orientadas a asegurar la estabilidad y la permanencia de interacciones sociales específicas.

social, particularmente en las sociedades estructuradas de acuerdo con la matriz ideológica occidental, comenzando por su vinculación con lo que denomino *la tentación mística*.

## EL MISTICISMO EN LA SIGNIFICACIÓN CULTURAL DE LAS MATEMÁTICAS

En Occidente las matemáticas han contribuido desde tiempos antiguos al sostenimiento de una cierta perspectiva mística de la realidad, la cual sigue aún presente. Esto ha traído como consecuencia el hacer de la profesión matemática una suerte de sacerdocio que se quiere asociado a la protección de conocimientos secretos, conocimientos supuestamente sagrados que dan a sus celosos guardianes la vía de acceso exclusivo a la divinidad. Desde el posicionamiento místico, la realidad suele entonces estar dividida en dos:

- la que todos podemos percibir y sentir, con mayor o menor sensibilidad y profundidad,
- y aquella que se supone está constituida de entidades abstractas y puras.

Esta última se suele presentar como únicamente accesible desde el pensamiento “privilegiado” de los matemáticos, que consideran a la primera como la realidad simple y sin misterios y por ello no tan importante, en comparación con la otra realidad. Por ello no sorprende que hoy en día algunos matemáticos profesionales lleguen a erigirse en una suerte de profetas vigilantes del respeto a una liturgia que le rinde pleitesía a teoremas y ecuaciones, pero sobre todo a los profetas mismos: los matemáticos. A este respecto, siglos atrás algunos matemáticos afirmaron que el pensamiento de dios<sup>7</sup> sólo podía comprenderse a través de las matemáticas, y de tiempo en tiempo emergen matemáticos profesionales que se reconocen en tales creencias, no siempre manifestándolo claramente, esto es, dejándose ir en una suerte de conveniente hipocresía. Conveniente

---

<sup>7</sup> Me disculpo de antemano con quienes se sientan ofendidos por mi uso del término *dios* escrito en minúsculas.

porque ocultan sus creencias tras el velo de la racionalidad para no asumir el costo de manifestarlas sin ambigüedad, con lo cual evitan el riesgo de perder los privilegios sociales que vienen con el reconocimiento social del papel de los matemáticos profesionales como supuestos guardianes de LA RAZÓN, así, en mayúsculas.

Al igual que en todos los campos de la ciencia, el racionalismo no siempre reina con exclusividad en el mundo de las matemáticas. La nociva tentación mística en el ámbito de éstas sólo ilustra uno de los aspectos excéntricos de las derivas de los imaginarios culturales estructurados en torno a las matemáticas.

En el recuadro 3 profundizo un poco más en este aspecto. Afortunadamente, en el ámbito de las matemáticas se sigue ensalzando el método racionalista de corte hipotético-deductivo como indispensable para construir nuevo conocimiento matemático. Esta particularidad fundamental de las matemáticas limita de manera severa el uso de éstas, comprendidas como institución, en la construcción de creencias, las cuales emergen necesariamente de la aceptación del *principio de autoridad*, radicalmente opuesto al conocimiento construido mediante la aplicación del razonamiento hipotético-deductivo.

Me permito afirmar que, en esencia, la única trascendencia que importa en las matemáticas es la de los números que no son solución de una ecuación polinomial con coeficientes racionales. Perdón aquí por el sarcasmo. La ridícula aceptación de la trascendencia por parte de los nostálgicos de la metafísica, por demás caduca, no tiene razón legítima de ser en el ámbito de las matemáticas. Me reconozco así entre quienes rechazan la vinculación de las matemáticas con lo teológico y defienden la necesidad social impostergable de su desacralización. Esto sin llegar a los excesos peligrosos que pueden alcanzarse cuando se comete el error de sacralizar a la razón. Hasta aquí con este tema. Después trataré en detalle lo relativo a las matemáticas y sus modos institucionalizados de razonamiento, aunque abordaré primero lo relativo a la interacción entre matemáticas y cultura desde una perspectiva sociológica crítica.

**Recuadro 3.** Las matemáticas y la tentación mística

Se reconoce como creyente en el misticismo a quien interpreta sus vivencias personales en términos de una relación directa con una *realidad trascendente* no discernible por el sentido común. El misticismo está presente no sólo en el ámbito de los cultos religiosos organizados, sino que se manifiesta a todo lo largo y ancho del espectro de la vida social. Para muchos el misticismo da forma a la espiritualidad que asocian a la búsqueda del sentido de su existencia personal. Más allá de su connotación psicológica, es un hecho que el misticismo está presente con mayor fuerza en aquellos ámbitos que se benefician al asociarlo con la protección de la legitimidad de las jerarquías sociales. Desde esa perspectiva es un resabio del pensamiento dominante en el Ancien Régime, caracterizado por la vigencia del *principio de autoridad*. No es un misterio el que ciertos matemáticos se reconozcan en el misticismo y al mismo tiempo se consideren científicos. La sacralización del conocimiento matemático, enmarcada en lo que me permito denominar aquí como *la tentación mística*, ha dado lugar a creencias que distan mucho de ser inofensivas, y quizás la más perniciosa es la que afirma que el pensamiento de dios se expresa en términos matemáticos. De hecho puede decirse que, en términos de su relación con el pensamiento, el lado oscuro de las matemáticas es precisamente su vinculación desafortunada con el misticismo. Como toda persona que se reconoce en el misticismo, el matemático místico construye una prisión para sí mismo, y al encerrarse en ella se aísla voluntariamente para proteger lo que percibe como su contacto directo e iluminado con la divinidad. La tentación mística alimenta así el egoísmo y coadyuva entonces a la constitución de nichos sociales exclusivistas regidos por el dominio del pensamiento abstracto, promovido en consecuencia como un atributo de mentes privilegiadas y únicas, gracias a lo cual se convierte en una fuerza que separa al matemático de las necesidades colectivas de la sociedad. Con ello, el misticismo inmerso en las matemáticas puede contribuir a hacer de éstas una herramienta de control de la mente social.

## SOCIOLOGÍA DE LA RELACIÓN ENTRE MATEMÁTICAS Y CULTURA

En mi sentir, la relación que guardan las matemáticas y la cultura, en su sentido más amplio, constituye un tema de suma importancia sociológica, quizás no suficientemente explorado por sociólogos profesionales. Me arriesgaré aquí al tratar este asunto y para ello me inspiro en el enfoque iniciado por dos pensadores indispensables que dedicaron su obra a la comprensión del fenómeno social en todas sus manifestaciones, el sociólogo judío-alemán Norbert Elias y el sociólogo francés Pierre Bourdieu: *la teoría sociológica de campos*. Dicha teoría introduce el concepto de campo social como el conjunto de relaciones de fuerza entre agentes (o instituciones sociales), enfrascados en la competencia por el dominio de un determinado capital (económico, simbólico o cultural). El campo social se comprende entonces como un espacio caracterizado por dos grandes propiedades que lo definen; esto es, el conjunto de relaciones de alianza entre los miembros, orientadas tanto a la obtención de beneficios como a la legitimación de lo que los define como grupo. A esta característica de todo campo social se le agrega la que atañe a la confrontación de grupos e individuos definida por la búsqueda por mejorar ubicaciones sociales, lo cual se traduce en la exclusión de otros grupos e individuos; la exclusión significa el no acceso a los recursos del campo social en disputa, que tratan de ser monopolizados por quienes detentan ubicaciones sociales dominantes. Debido a la presencia de estas dos características de todo campo social, la ubicación social de un individuo específico en el campo, esto es, su capacidad de influir en las dinámicas de alianza y de confrontación, depende del tipo, el volumen y la legitimidad definida socialmente del capital por el cual se compite. A esta dependencia del capital en disputa se une la dinámica del *habitus*, esto es, las disposiciones del actuar social embebidas en la personalidad del individuo y que éste adquiere a lo largo de su trayectoria social.

Hablar entonces de las matemáticas en términos sociológicos requiere abordar lo que concierne al quehacer profesional de quienes se dedican a la construcción de conocimiento definido socialmente como matemático, esto es, los matemáticos profesionales. Su quehacer social *certificado* es lo que da forma a la interacción del matemático con el

campo social de las matemáticas. En el recuadro 4 abordo este asunto y, como el lector podrá bien apreciar allí, estoy eliminando de la definición implícita de matemático profesional a quienes se dedican en exclusiva a la enseñanza de las matemáticas, en cualquier nivel académico, o bien a su divulgación. La razón por la cual los excluyo radica en el hecho de que su influencia en los modos de ser del campo social de las matemáticas es débil, casi inexistente. En lo que sigue califico entonces como matemático profesional únicamente a quien se dedica a la investigación científica en el ámbito de las matemáticas, y esto sólo cuando está acreditado *socialmente* para hacerlo. El matemático profesional no sólo está certificado para serlo, sino que posee el *habitus* específico que lo distingue del resto de los profesionales dedicados a la construcción de conocimiento científico.

Más allá del plano individual, las matemáticas, como toda actividad humana institucionalizada, son un constructo social dinámico en evolución permanente. Como lo he manifestado previamente, el matemático profesional está sometido a disputas en el seno de su comunidad por la ubicación social de sus integrantes, puesto que los matemáticos profesionales no son entidades abstractas, sino seres humanos concretos con capacidades y necesidades también concretas, por lo que compiten entre sí para establecer jerarquías y con ello gozar de los privilegios correspondientes que acompañan a cada una de éstas.

Las disputas entre matemáticos –querellas con una rica historia– han dado forma a los diversos campos de estudio de la ciencia matemática y han también moldeado la relación que se establece entre la mente social contemporánea y el universo de las matemáticas. Las consecuencias de esta relación entre la sociedad y el campo social de las matemáticas se manifiesta incluso en la definición y, más aún, en la promoción de ciertos rasgos comportamentales de la supuesta personalidad de los matemáticos. La excentricidad, por ejemplo, es un rasgo socialmente promovido. El *habitus* de todo matemático se encuentra entonces bajo la presión de los imaginarios culturales, buscando minimizar la brecha que separa al individuo concreto del personaje imaginado. La tensión resultante tiene consecuencias importantes en la estructuración de la personalidad de quien se reconoce como matemático, pues lo coloca en la situación

**Recuadro 4.** Las matemáticas como profesión

Como en toda actividad humana que requiere el dominio de habilidades específicas, en el caso de las matemáticas hallamos tanto profesionales como aficionados. En cuanto a los profesionales, su actividad está socialmente certificada, reconociéndola, por ejemplo, mediante el otorgamiento de diplomas académicos específicos. En el caso de los aficionados, este no es el caso. Si bien en el pasado mucho del conocimiento matemático fue elaborado por aficionados, hoy en día esto es muy difícil debido al elevado nivel de especialización que caracteriza a las profesiones científicas contemporáneas. En cuanto a los matemáticos profesionales, se presentan diversos niveles de especialización, la cual empieza muy temprano en el proceso educativo que le está asociado. Los modos específicos de la especialización están asociados a la meta *social* perseguida en cuanto al quehacer del matemático. Por ejemplo, algunos matemáticos profesionales se dedican casi en exclusiva a la enseñanza, y esto requiere, además de la formación en el manejo de lo propiamente matemático, entrenamiento específico en aspectos pedagógicos y didácticos relacionados con el nivel educativo al cual esté asociada la enseñanza. Los requerimientos para enseñar en el nivel educativo secundario son muy distintos de los requeridos para el nivel educativo universitario, por ejemplo. En el caso de la formación para la enseñanza, ésta difiere de la que requieren matemáticos orientados a la investigación científica fundamental, cuya formación académica toma un tiempo considerable; suele requerir la obtención de grados académicos de licenciatura, maestría y doctorado (validados por las respectivas tesis de grado), como prerrequisitos para la obtención de un puesto de trabajo en una institución de corte científico, en general mediante la participación en un concurso de oposición. En la profesión matemática sigue hasta la fecha reinando un esquema de trabajo que recuerda a lo expresado por el sociólogo Max Weber a principios del siglo xx, al abordar el tema de la ciencia comprendida como vocación: la profesión matemática exige un gran compromiso personal.

incómoda de toda persona que desea la libertad de su ser y que al mismo tiempo requiere actuar su personaje de acuerdo con las exigencias del universo social al que está integrado, para recibir en consecuencia las ventajas sociales correspondientes. En el universo de la ciencia existen pocas profesiones en las cuales se manifieste de manera tan clara la dinámica que se da entre un imaginario cultural específico y la personalidad socialmente deseada de un profesional también específico. Esto sin lugar a dudas tiene grandes efectos en la psicología del matemático profesional. La mente del matemático está moldeada en gran medida por los imaginarios culturales que le conciernen.

Resumiendo entonces, el quehacer de los matemáticos se da en el interior de una sociedad específica que posee una estructura y una historia también específicas que ha tomado forma a lo largo ya de miles de años y como tal ha involucrado el quehacer de pensadores brillantes en el marco de dinámicas sociales y culturales que les han sido específicas.

A modo de preludio a la incursión en la excentricidad como supuesto atributo de la personalidad de los matemáticos, para ejemplificar la manera como la interacción social entre las matemáticas y el resto del universo social promueve la legitimidad de ciertos aspectos del *habitus* genérico del matemático profesional, propongo aquí un listado de algunos de los matemáticos más notables que han dejado una huella indeleble en lo que solemos concebir como la civilización humana desde la perspectiva hegemónica occidental. Seguramente el lector, al evocar sus tiempos de escuela, reconocerá a más de uno de los listados:

- Arquímedes;
- Pierre de Fermat;
- Blaise Pascal;
- Leonhard Euler;
- Isaac Newton;
- Carl Friedrich Gauss;
- Henri Poincaré;
- Andrey Kolmogorov;
- Grigori Perelmán.

El lector curioso hallará a algunos de los incluidos en todo listado que trate de ubicar a los científicos más notables de todos los tiempos; lo más probable es que en tales listas estén tanto Arquímedes como Isaac Newton. Ahora bien, como puede verse, esta lista, organizada de manera cronológica, incluye únicamente hombres que pueden identificarse como europeos. ¿Por qué? La razón es por demás obvia. Las matemáticas institucionalizadas como campo social promotor del razonamiento deductivo son producto neto de la sociedad occidental. Esta afirmación molesta a toda persona a la que las matemáticas le atraen y que al mismo tiempo critica la arrogancia cultural de Occidente. Sin embargo, es un hecho que el posicionamiento de las matemáticas como terreno de acción del razonamiento hipotético-deductivo es una contribución occidental mayor al pensamiento universal. Esto significa que lo que ha caracterizado negativamente a Occidente, a saber:

- la estructura social patriarcal,
- el expansionismo geográfico,
- el innegable racismo y
- el dominio masculino aún vigente,

ha tenido y sigue teniendo gran influencia en los imaginarios culturales ligados a las matemáticas. Estas características negativas de Occidente no anulan las contribuciones universales positivas del pensamiento occidental. Está muy lejos de mis intenciones introducir aquí un punto de vista maniqueo. Por supuesto que el eurocentrismo es indisociable del proceso de conquista del imaginario universal que Occidente sostiene en permanencia, particularmente desde la emergencia del dominio universal anglosajón a principios del siglo XIX, marcado simbólicamente por la victoria que obtuvo la armada británica ante las flotas navales combinadas de Francia y España el 21 de octubre de 1805 en la célebre batalla de Trafalgar. La conquista permanente que ejerce Occidente sobre el imaginario universal es tan cierta como lo es la promoción occidental del racionalismo filosófico, que hizo posible el triunfo del pensamiento científico moderno sobre la herencia escolástica, del cual se nutren las mismas matemáticas. Sostengo que esta vertiente de la cultura occidental es

positiva y que constituye un ejemplo notable de sus grandes logros. En lo que sigue abordo algunos de los aspectos más importantes de los imaginarios culturales que en general rigen en Occidente la relación de la sociedad con los matemáticos. Como un ejemplo ilustrativo comienzo por exponer lo que respecta a la supuesta excentricidad en la personalidad que se ha adjudicado como atributo (¿deseable?) del *habitus* del matemático. Este es un tópico muy interesante. El lector juzgará.

## PASIONES EXCÉNTRICAS

La historia de las matemáticas en Occidente, en concordancia con los imaginarios culturales dominantes que le están asociados, es también la historia *elegida y promovida* de personajes excéntricos entregados a su pasión, individuos especiales y únicos obsesionados por la búsqueda sin contemplaciones de la verdad absoluta. La mística y las matemáticas unidas. Esta es la clase de narrativa simplista, deudora del Romanticismo europeo del siglo XIX, que acompaña a la historia preferida de las matemáticas en Occidente. En el imaginario colectivo, constructo social, los actos de algunos grandes matemáticos, reconocidos por sus pares por logros notables, han alcanzado en algunos casos el estatus de leyenda, mezclándose así los hechos verificables con la imaginación cultivada a lo largo de los siglos. En lo que viene a continuación pasaré revista a algunas de las anécdotas preferidas de los historiadores *de los matemáticos* —aunque que no de las matemáticas—, si bien antes de ello me parece pertinente agregar el comentario siguiente:

*La historia de un campo específico de la ciencia comprende el estudio de las circunstancias históricas que lo condicionan. Por ejemplo, la necesidad administrativa de cuantificar superficies de labranza condicionó la emergencia de las primeras exploraciones matemáticas en Mesopotamia y en el Egipto Antiguo. Debido a que las matemáticas las llevan a cabo personas concretas, también mucho de su historia se centra en la indagación de las circunstancias de vida de matemáticos cuya contribución ha sido significativa para la ciencia matemática. Sin duda las preferencias personales de los historiadores determinan la elección de la narrativa de los hechos, así como el peso que se le da a lo anecdótico.*

Paso ahora revista a algunas de las manifestaciones más notables de la excentricidad en el gremio de los matemáticos. Lo que expongo pertenece al dominio de lo anecdótico y por ello su verificabilidad será siempre motivo de debate.

#### LA MUERTE DE ARQUÍMEDES

Aunque no es posible verificarlo, y seguramente dista mucho de ser verídico, el relato de la muerte del matemático griego Arquímedes a manos de un soldado romano durante el sitio de Siracusa en el contexto de la Segunda Guerra Púnica (218 a.C.-201 a.C.), tiene un gran encanto, *sobre todo para los matemáticos*. Este es de hecho el ejemplo por antonomasia de la asociación que se da, en la historia institucional de las matemáticas, entre la pasión por el conocimiento que se le adjudica a los matemáticos y la excentricidad en la personalidad que los distinguiría. En el relato popular Arquímedes de Siracusa contemplaba un diagrama matemático dibujado sobre arena o, mejor aún, sobre las cenizas provenientes de los incendios que consumían su ciudad conquistada por las legiones al mando del comandante romano Marcus Claudius Marcellus. Entonces, de acuerdo con el relato, al caer la ciudad en manos de los invasores un soldado romano se presentó ante el gran matemático y le hizo saber de manera perentoria que su comandante, supuesto admirador de Arquímedes, ordenaba que se presentase ante él. Según el relato que ha llegado hasta nuestros días Arquímedes le respondió al soldado que no lo haría, porque tenía que terminar un problema matemático que lo ocupaba en esos momentos. Indignado y enfurecido entonces por el desplante del sabio, el soldado lo mató con su espada. ¿No es este caso un relato trágico y hermoso? A mí me lo parece. ¿Qué tanto de verdad hay en esta anécdota? Es prácticamente imposible saber lo que pasó en realidad, pues no existen fuentes documentales verificables, más allá de lo escrito por el historiador romano de origen griego Plutarco, siglos después de la muerte de Arquímedes. Lo más interesante de este relato es su contribución a la emergencia en el imaginario social del matemático como héroe, ese que se sacrifica por el conocimiento y también por la libertad de sus conciudadanos ante la agresión del invasor. La tensión que existe hasta nuestros

días entre las dos vertientes de las matemáticas, la pura y la aplicada, está claramente presente en el relato. Según una leyenda, también popular, Arquímedes creó máquinas sorprendentes que le hicieron difícil a los romanos la conquista de Siracusa y ante la derrota se refugió en su pasión por el conocimiento. La manifestación del romanticismo en el ámbito de las matemáticas ha hecho de Arquímedes el modelo para todo aspirante a matemático profesional.

*Arquímedes es sin lugar a dudas el héroe de los matemáticos.*

#### EL MISTERIOSO DUELO DE ÉVARISTE GALOIS

La tragedia ¿ficticia? de la muerte de Arquímedes se conecta con la más verificable del matemático y agitador político francés Évariste Galois, quien es herido de muerte durante un duelo misterioso en la mañana del 30 de mayo de 1832, para morir a los 20 años (sí, a los veinte años...), en presencia de su hermano Alfred, rechazando en su lecho de muerte la presencia de un sacerdote. De esta manera, Évariste Galois, de acuerdo con la anécdota, demostró hasta el fin de su vida su lealtad a sus principios republicanos, revolucionarios y antirreligiosos. Esto es lo que nos cuenta la leyenda. El día anterior al duelo, el matemático –autoasumido como tal–, consciente de que le espera la muerte, pues su adversario era reconocido como talentoso en el manejo de las armas de fuego, escribe una misiva dirigida a su amigo Augusto Chevalier. En dicha carta, que ha alcanzado un estatus de leyenda, le pide que le suplique a Carl Friedrich Gauss o a Carl Gustav Jakob Jacobi, dos de los grandes matemáticos de esa época, que den su opinión sobre la importancia de los teoremas que se resumen en ella y que haga que la impriman en la *Revue encyclopédique* (lo cual aconteció efectivamente en 1832). Las indagaciones matemáticas de Évariste Galois han tenido gran trascendencia en la ciencia matemática,<sup>8</sup> y la leyenda de su muerte sigue alimentando el interés de historiadores de las matemáticas, quienes siguen indagando en torno a la causa verdadera del duelo que provocó su muerte, supuestamente debido a un asunto de

<sup>8</sup> De hecho existe un prestigioso campo de estudio de la ciencia matemática denominado justamente *teoría de Galois*. Sin entrar en detalles sólo indicaré que ésta es parte del andamiaje conceptual del álgebra moderna.

celos que involucraba a una mujer. Dado que existen pocos indicios documentales del hecho, algunos historiadores han elaborado recientemente conjeturas muy interesantes. En una de ellas, Évariste Galois habría sido retado a duelo después de emitir comentarios homofóbicos en contra del militar al que se enfrentó. ¿Cómo se establece la verosimilitud de una historia como ésta? ¿Importa hacerlo? Debido a que todo quehacer profesional es un constructo social, estas son preguntas por demás pertinentes y venceré aquí la tentación de darles respuesta.

#### EL MILITANTISMO DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Menos trágica, pero no por ello menos asombrosa y excéntrica, es la vida de Alexandre Grothendieck, uno de los pilares de la geometría algebraica y considerado por muchos como el más importante matemático del siglo xx. Alexandre Grothendieck, hijo de una pareja de militantes anarquistas, profesó a lo largo de su vida una posición ideológica de corte ecologista y contraria al militarismo, que no es difícil de entender por su origen familiar. Su padre, Alexander “Sascha” Schapiro, combatió primero en la Guerra Civil Rusa en el bando anarquista contra los bolcheviques (como integrante del Ejército Negro, oficialmente denominado Ejército Revolucionario Insurreccional de Ucrania) y después en la Guerra Civil Española contra los militares sublevados en el mes de julio de 1936, y terminó asesinado por el nazismo en el campo de concentración de Auschwitz. Su carrera profesional en las matemáticas francesas fue fulgurante; recibió en 1966 la Medalla Fields, el reconocimiento más importante que se da en nuestros tiempos a logros en el conocimiento matemático alcanzados antes de cumplir los 40 años de edad, aunque no asistió a Moscú a recogerla durante el Congreso Internacional de Matemáticas; esto en protesta por las intervenciones militares soviéticas en Europa del Este. Dejó su trabajo en el Instituto de Altos Estudios Científicos de Francia en 1970 al enterarse de que parte del presupuesto de dicha institución provenía del Ministerio Francés de la Defensa. De una creatividad inagotable, a lo largo de su vida:

- fue gurú de grupos de *hippies*,
- fungió como profesor del prestigioso Colegio de Francia,

- fundó un grupo ecologista opuesto a los excesos de la ciencia y la tecnología,
- llegó a ayunar casi hasta la muerte,
- incursionó en el misticismo

y vivió sus últimos años casi como ermitaño en un pueblo francés de la región de Occitania. A su muerte en el año 2014 se presentó una disputa por la posesión de decenas de miles de páginas que escribió a lo largo de décadas de indagaciones matemáticas, que confrontó a sus hijos con el Estado francés. Además escribió el análisis crítico de su esfuerzo intelectual como matemático y de las relaciones con su entorno social en un volumen inédito de 1 000 páginas, que tituló en francés *Récoltes et Semailles: Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* (que en español sería “Cosechas y siembras: reflexiones y testimonios sobre un pasado de matemático”). Alexandre Grothendieck llevó la excentricidad a niveles difíciles de creer. Sin duda su ideología y su historia personal influyeron notablemente en los modos de exploración que siguió al elaborar conocimiento matemático. ¿Otra personalidad y otra historia personal habrían producido los mismos logros? Dejo la respuesta al lector.

#### LA ÉTICA SIN CONCESIONES DE GRIGORI PERELMÁN

Más cerca de nuestros días tenemos al también matemático excéntrico ruso Grigori Perelmán, quien rechazó en el año 2006 la Medalla Fields en un contexto que tenía connotaciones geopolíticas. Esto lo abordo en el recuadro 5. El motivo del rechazo al premio se explica, de acuerdo con lo expresado en su momento por Grigori Perelmán, por dos razones:

- la primera concernía a la defensa de sus principios éticos, que lo dejaban satisfecho por haber alcanzado la verdad que buscaba, por lo cual consideraba innecesario todo reconocimiento social;
- la segunda razón es el rechazo frontal de Grigori Perelmán a lo que él percibe como la falta de integridad de ciertos matemáticos, que los llevaba incluso al extremo de adjudicarse el trabajo de otros.

**Recuadro 5.** Grigori Perelman y la geopolítica

La asignación de la Medalla Fields a Grigori Perelmán en 2006 reconocía su demostración de la *conjetura de Poincaré*, una declaración matemática del campo de la topología algebraica (rama de las matemáticas que se sirve del álgebra para estudiar las propiedades de espacios topológicos, los cuales generalizan la noción de espacio en el contexto matemático), formulada por Henri Poincaré en 1904. La búsqueda de la demostración requirió el esfuerzo de generaciones de matemáticos a lo largo de más de un siglo, y en su etapa final marcó la confrontación entre Occidente y la República Popular China por el dominio universal de la ciencia matemática. Un conflicto que tendrá manifestaciones simbólicas importantes conforme la emergencia de la República Popular China como superpotencia se traduzca en el debilitamiento occidental en la ciencia. En el contexto de tal confrontación, Grigori Perelmán decidió abandonar el quehacer matemático, enojado por lo que él percibió como la proliferación de la deshonestidad en su ámbito. Algunos han visto en esta actitud de Grigori Perelmán una arrogancia inmensa, y otros —el matemático ruso-francés Mijaíl Leonídovich Grómov entre ellos— como la manifestación del deseo de Grigori Perelmán de vivir de acuerdo con sus principios éticos. Ahondando un poco más en el asunto geopolítico: históricamente la investigación en matemáticas ha sido promovida por fuerzas políticas nacionalistas por diversas razones, entre las que se incluyen su aplicabilidad tecnológica y su papel como catalizador del orgullo nacional. Esto ocurrió, por ejemplo, al enfrentarse la escuela matemática francesa con la alemana a fines del siglo XIX, que se traduciría en la hegemonía mundial de la Universidad de Gotinga, bajo el liderazgo de David Hilbert, en el campo de las matemáticas. Esta llegaría a su fin con la emergencia del nazismo, al colapsarse la República de Weimar en 1933, que vería la consolidación en Alemania de la vertiente utilitarista de la ciencia en detrimento de la ciencia sin aplicaciones inmediatas.

La actitud excéntrica de Grigori Perelmán es criticada por algunos y defendida por otros, llegando incluso a atraer la atención de medios masivos de comunicación, usualmente poco inclinados a tratar temas complejos de la ciencia matemática. El interés mediático se explica por la renuncia de Grigori Perelmán a las jugosas recompensas económicas que le significaban sus logros matemáticos. En efecto, en julio del año 2010 rechazó el premio de un millón de dólares estadounidenses que se le otorgaba por haber demostrado exitosamente la conjetura de Poincaré (uno de los así denominados siete Problemas del Milenio), por parte del Instituto Clay de Matemáticas (entidad privada ubicada en Peterborough, New Hampshire, Estados Unidos de América). Dado que para muchos científicos la búsqueda de reconocimiento es una de sus metas vitales, el comportamiento de Grigori Perelmán es perturbador; el narcisismo que suele acompañar al quehacer científico con excesiva frecuencia se ve deslegitimado socialmente ante acciones tales como esta. Justificado o no, Grigori Perelmán incursiona con éxito en la narrativa de la historia de las matemáticas que adora a los héroes excéntricos.

¿Qué tanto influyó en sus decisiones la presión que sobre él ejerció el imaginario social que asigna un papel heroico al matemático? Intuyo que mucho. ¿Qué opina el lector? Hace no mucho tiempo hallé un video disponible en la plataforma estadounidense de distribución en línea YouTube, en el que se muestra a un grupo de jóvenes artistas rusos que se reúnen con Vladímir Putin, en ese momento presidente de la Federación Rusa. En dicho video, datado el 24 de agosto de 2017, un joven cineasta le presenta a Vladímir Putin un proyecto cinematográfico que involucra a Grigori Perelmán. En el intercambio que se da entre el cineasta en ciernes y Vladímir Putin, éste le cuestiona si tiene la autorización de Grigori Perelmán para realizar su proyecto cinematográfico. Es interesante observar al jerarca ruso, exoficial del Comité para la Seguridad del Estado (КГБ por sus siglas en ruso) de la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas y exdirector del Servicio Federal de Seguridad de Rusia (ФСБ por sus siglas en ruso), como guardián autoerigido de los derechos a la privacidad del matemático ermitaño. Difícilmente uno puede creer que un exespía conocido por su brutalidad y su desapego al respeto de los derechos humanos se

tome en serio lo de la privacidad de las personas. Este es en mi opinión un caso extraordinario de la apropiación de los mitos, más específicamente el del matemático heroico, por parte de los políticos.

Dejo hasta aquí este recuento de notables matemáticos excéntricos, sin dejar de mencionar que no siempre la excentricidad acompaña a la personalidad de los matemáticos. ¿O sí? Es complicado dar respuesta a esta pregunta, ya que no existen estudios sistemáticos bien realizados, o no los conozco, que hayan indagado en los rasgos específicos de la personalidad que caracterizan a matemáticos capaces de grandes logros, reconocidos como tales por su pares, en su ámbito profesional. Algunos textos que pude localizar se centraban en anécdotas y carecían de valor científico. He aquí un asunto pendiente para la ciencia. ¿Cuántos de los ganadores de la Medalla Fields presentan la excentricidad como parte dominante de su *habitus*? Seguramente la intersección entre las neurociencias y la sociología podría proveer algunas informaciones al respecto.

Para terminar con mi exposición sobre el *habitus* del matemático y el imaginario social, me voy a permitir incluir aquí una anécdota personal. Espero que el lector me perdone el atrevimiento. En los tiempos en los que cursaba mis estudios universitarios (fines de los años ochenta del siglo pasado), en Ingeniería Mecánica Eléctrica, en lo que era en aquellos tiempos la Escuela Nacional de Estudios Profesionales, Unidad Aragón, de la Universidad Nacional Autónoma de México, de vez en cuando me reunía con algunos amigos para observar el desenvolvimiento de partidos de fútbol en la cancha deportiva que para tal efecto poseía la escuela. Recuerdo que uno de mis amigos me cuestionó sobre lo que yo estaba observando durante uno de los juegos. Antes de escuchar mi respuesta me dijo que seguramente yo estaba haciendo cálculos para determinar las estrategias de los jugadores y para determinar el movimiento del balón. La certeza con la que me dijo eso me dejó sin palabras. Yo no estaba haciendo ninguna clase de cálculos y únicamente disfrutaba del sol y del espectáculo. Acontecimientos similares me ocurrían con frecuencia desde la infancia. ¿Qué consecuencias tenía esa perspectiva de mi entorno sobre mi comportamiento y sobre la construcción de mi personalidad? ¿De qué manera la presión del imaginario social en torno a

mis actos condicionaba mis elecciones profesionales? Las consecuencias fueron sin duda importantes, y en ellas influyó también la miopía que afectaba mi visión, así como mis circunstancias económicas y socioculturales. Muchos años después del episodio narrado, me llegué a entretener asignando proyectos, a algunos de los alumnos que he tenido, relacionados con la descripción matemática de fenómenos de interacción social en el contexto de juegos de competencia, tales como el fútbol.

En 1984 se escuchaba en la radio de la Ciudad de México la canción *Payaso* en la voz del cantante popular conocido como José José (de nombre José Rómulo Sosa Ortiz), compuesta por Rafael Pérez Botija, e incluida en el álbum *Reflexiones* de la disquera RCA. Esa canción tiene una frase que viene al caso:

*Y es verdad, soy un payaso,  
pero ¿qué le voy a hacer?  
Uno no es lo que quiere,  
sino lo que puede ser.*

La cultura popular expresa en esta frase la comprensión intuitiva de las dinámicas que subyacen a la construcción del *habitus*, sea éste del matemático o bien el de cualquier otra profesión.

Es tiempo de abordar algunos de los aspectos problemáticos que caracterizan a las matemáticas cuando se las instrumentaliza para legitimar estrategias de dominación social, esto es, cuando posibilitan estrategias de índole política que benefician a sectores sociales dominantes. Resulta importante constatar que las matemáticas han llegado a convertirse en una arma eficiente de control social.

## DESLICES MATEMÁTICOS DEL IMAGINARIO SOCIAL

En la sección precedente abordé algunos de los aspectos de la relación que guardan las matemáticas como institución real y simbólica con el universo social. Siguiendo una perspectiva de índole sociológica, revisé brevemente los pormenores de esa relación, centrándome en la presión que ejerce el imaginario social sobre el *habitus* del matemático profesional, e ilustré sus consecuencias con lo que atañe a la *prescripción social*

de la excentricidad como atributo de la personalidad del matemático. Si bien es importante clarificar cómo se construye socialmente la mente del matemático, no es esa mi meta en este libro. Me importa más la defensa del aspecto lúdico que caracteriza la interacción entre el razonamiento hipotético-deductivo con el proceso de construcción del conocimiento matemático. Antes de tratar ese asunto, en lo que sigue expongo lo que en mi consideración son las consecuencias más negativas, para la sociedad en su conjunto, del imaginario social dominante asociado hasta ahora con las matemáticas, no sólo en Occidente sino en todo el mundo.

En cuanto a por qué las matemáticas son un tema problemático de reflexión, tal y como lo afirmé al inicio de este capítulo, la respuesta elegida en este volumen radica en que es en extremo complicado desprenderse de la perspectiva occidental, la cual no sólo ha despreciado el conocimiento matemático originado fuera de Occidente, sino que también ha discriminado modos de razonamiento ajenos a los que se siguen en el contexto de las matemáticas occidentales. Es bien sabido que este desprecio hacia los esquemas de pensamiento que no se ajustan con precisión a los moldes occidentales se debe en gran medida a la visión colonial que sigue permeando a la ciencia dominante y que coloca en una posición subeditada al conocimiento originado por los pueblos colonizados por Occidente. Aunque se llega a afirmar hoy en día que toda cultura, en todo tiempo y en todo lugar, ha estado asociada por necesidad con las matemáticas, es común adjudicarle desde la perspectiva occidental el *razonamiento hipotético-deductivo* como característica propia y definitoria de las matemáticas occidentales, la cual le sería única y exclusiva.

Entonces, para el imaginario social de Occidente, las matemáticas (occidentales) serían un monumento a la capacidad humana *occidental* de razonar de manera lógica mediante deducciones con base en premisas bien establecidas, mientras que las “otras matemáticas” estarían asociadas a aspectos no del todo racionales del pensamiento y por ello serían inferiores por definición. ¿Qué se puede decir aquí al respecto? El debate es valioso y le corresponde a los estudiosos de la historia y de la evolución cultural de las matemáticas meterse de lleno en él para proponernos algunas respuestas plausibles, a fin de articular estrategias culturales que

permitan atenuar la presión excesiva que ejerce el pensamiento colonial sobre los procesos de reflexión. Un tema potencial de interés a este respecto es el que atañe a la influencia de las emociones en la indagación matemática y su relación con el uso de la intuición como antesala al ejercicio del pensamiento racional de corte hipotético-deductivo. A fin de cuentas los seres humanos no somos autómatas racionales y carentes por ello de emociones, por lo que es previsible el papel regulador de la emotividad sobre el razonamiento hipotético-deductivo.

Hay otro aspecto problemático en la reflexión en torno a la significación cultural de las matemáticas que no puedo dejar de lado: su peligroso lugar de excepción al abordar el tema de la validación y de la cuantificación de la inteligencia humana. La triste historia del eugenismo, iniciado en el siglo XIX por el racista inglés Francis Galton y llevado a sus extremos por las Leyes de Núremberg, adoptadas por la Alemania nazi en 1935 (inspiradas por la institucionalización estadounidense del eugenismo), muestran de manera trágica hasta dónde puede llevarnos la cuantificación institucional de la inteligencia humana. Este es quizás el aspecto más perturbador del imaginario social construido en torno a las matemáticas.

*La capacidad de resolver problemas matemáticos complejos se ha convertido en la práctica en sinónimo de poseer inteligencia racional valiosa y excepcional, y por ello motivo de admiración y de reconocimiento, haciendo a un lado las otras manifestaciones de la inteligencia que los seres humanos poseemos y que no pueden reducirse únicamente a lo que se identifica como pensamiento racional.*

Desafortunadamente la asociación mecánica entre matemáticas e inteligencia ha dado lugar a patologías sociales obvias y graves, que requieren ser tratadas con urgencia. Patologías tales como las que han llevado a elaborar en los últimos tiempos filtros sociales a nivel mundial que han definido en gran medida el destino vital de los niños en el sistema educativo contemporáneo y que se han traducido en una relación social de amor-odio con las matemáticas. Es discriminatorio y también peligroso certificar como inteligente sólo a quien muestra habilidades, verificables, de índole matemática. Como bien lo ha expuesto Howard Earl Gardner —psicólogo estadounidense de la Universidad de Boston—, la inteligencia

humana no se resume a la inteligencia lógico-matemática. Todo sistema de filtraje social implica la institucionalización de prácticas discriminatorias y la valoración social de las matemáticas coadyuva a la legitimación social de algunas de ellas. Esto naturalmente ha llevado a procesos de resistencia social que se oponen al uso de las matemáticas en el contexto de procesos de filtraje social, y en algunos casos esto se llega a manifestar de manera perversa mediante el rechazo total al conocimiento matemático, con lo cual se promueve la ignorancia de este campo del conocimiento científico. La resistencia en torno a toda estrategia de filtraje social, comprendido como coadyuvante a la consolidación de procesos de dominación social, es bienvenida, aunque es importante establecer salvaguardas para evitar excesos peligrosos. No deja de ser trágico y socialmente costoso combatir dinámicas sociales discriminatorias que se sirven de la legitimidad social de las matemáticas, mientras que de manera simultánea se promueve el rechazo activo al conocimiento matemático.

## LA INSOPORTABLE EXCLUSIÓN DE LAS MUJERES

Para finalizar mi exposición en torno a los deslices matemáticos del imaginario social me es importante abordar lo que sucede en cuanto a la triste e injusta relación que ha existido y sigue existiendo entre el campo social de las matemáticas y el mundo de las mujeres. Aquí evito conscientemente y de manera voluntaria hablar del “mundo femenino”, pues la noción misma de feminidad ha sido puesta en duda por una parte del feminismo radical contemporáneo.

Los lectores interesados pueden explorar lo que ha expresado al respecto, de manera por demás lúcida, la escritora y cineasta feminista radical francesa Virginie Despentes, autora de la polémica novela *Fóllame*, publicada originalmente en francés en 1994 por la editorial francesa Florent Massot bajo el título *Baise-moi*, y en español en 2019 por el grupo editorial Random House y llevada al cine por la misma autora, bajo el mismo título, en colaboración con la periodista, escritora y ex actriz pornográfica francesa Coralie Trinh Thi en el año 2000. La película en México se promovió como *Viólame*. Tristemente una de sus dos protagonistas

principales, la francesa Karen Bach, cuyo nombre artístico fue Karen Lancaume, se suicidó en el año 2005.

La búsqueda de la igualdad de género que ha caracterizado el debate social en las últimas décadas es sin duda un asunto fundamental, ya que atañe la impostergable necesidad de imaginar y de construir nuevas estructuras sociales que borren la exclusión de las mujeres del campo social de las matemáticas. Previamente he abordado el mal uso de las matemáticas en estrategias de filtraje social, y a este respecto las mujeres han sido afectadas de manera notable, más que cualquier otro grupo social. Desafortunadamente, este es aún el caso incluso en los países desarrollados caracterizados por una igualdad elevada de género, que dista mucho de ser perfecta. Esto ha sido cierto desde hace mucho tiempo y para reforzar mi perspectiva invito al lector a pasar de nuevo revista al listado de matemáticos notables que incluí precedentemente. Como se podrá notar, en dicho compendio no anoté el nombre de ninguna mujer. ¿Por qué? Asumí conscientemente mi decisión de no incluir a ninguna mujer al elaborar ese listado y me parece correcto explicar ahora el porqué. Mi razón principal radica en mi rechazo a la condescendencia con la que se suele tratar, desde la construcción académica de la historia de las matemáticas, la presencia de las mujeres. Tratar de manera condescendiente a un grupo social, en este caso las mujeres, no lleva a cambiar una situación injusta, sino todo lo contrario.

En general son pocas las fuentes bibliográficas serias que incluyen el nombre de mujeres a las que se les reconozca como matemáticas notables, esto es que como tales hayan hecho contribuciones significativas en la construcción del conocimiento científico. ¿Por qué se da esa situación? La razón simple radica en el hecho de que la incursión institucional de las mujeres en el ámbito de las matemáticas es históricamente muy reciente, por lo que no es para nada extraño que sea muy difícil localizar contribuciones matemáticas importantes realizadas por mujeres, simplemente porque son escasas. A este respecto por lo general se hacen referencias puramente anecdóticas en textos dedicados a la divulgación de la ciencia, que en mi sentir no coadyuvan en lo más mínimo a resolver el problema de la exclusión sistémica de las mujeres del campo social de

la ciencia matemática. El afirmar que, como lo hacen muchas veces los libros de divulgación científica, también ha habido a lo largo del tiempo mujeres que han obtenido grandes logros matemáticos, para después recitar, por ejemplo:

- la trágica muerte de Hipatia de Alejandría en el año 415 a manos de fanáticos cristianos;
- la traducción, del latín al francés, de la obra de Isaac Newton *Principios matemáticos de la filosofía natural*, efectuada por la marquesa Émilie du Châtelet, publicada en 1756 bajo la supervisión de Voltaire;
- el papel en el siglo XIX de Ada Lovelace en la creación de la máquina analítica de Charles Babbage (1791-1871) (computadora mecánica, propuesta en 1837 y sólo construida en 1991, que no tuvo ninguna influencia en la emergencia de la tecnología electromecánica del cómputo en el siglo XX),

sin abordar las circunstancias sociales que explican la ausencia de las mujeres, alimenta una perspectiva condescendiente de su presencia en el campo social de las matemáticas. Afirmar que las mujeres también han contribuido a las matemáticas y luego respaldar tal afirmación presentando logros discutibles y banales, sólo degrada a las mujeres al negarles la capacidad de alcanzar logros matemáticos notables. Defiendo entonces que es mejor admitir con franqueza que han sido muy pocos los aportes de las mujeres al conocimiento matemático –porque su inclusión en dicho ámbito ha estado y sigue estando severamente limitado por obstáculos estructurales–, que promover un enfoque que les ha asociado a las mujeres logros matemáticos que muchas veces son banales, poco significativos o incluso inexistentes.

Quizás la única excepción a este tratamiento condescendiente se da al considerar el caso de la matemática alemana Amalie Emmy Noether, promotora de la abstracción como fundamento del pensamiento matemático. Algebraísta notable, formada en el rigor de la ciencia matemática alemana de fines del siglo XIX y principios del siglo XX, ella perteneció al claustro académico de la Universidad de Gotinga en los tiempos de su hegemonía mundial en el ámbito de las matemáticas. Víctima, primero, de

la misoginia del entorno universitario alemán en los años que siguieron a la finalización de sus estudios doctorales en la Universidad de Erlangen en 1907, sufrió después la persecución institucionalizada del nazismo como integrante de la comunidad judía. Despedida de la Universidad de Gotinga, emigró a los Estados Unidos de América en 1933 para integrarse a la universidad privada femenina de Bryn Mawr en Pensilvania, donde moriría de cáncer a los 52 años de edad. Su legado, aún vigente, incluye contribuciones de gran importancia al álgebra abstracta, a la topología algebraica y a la física teórica. Este ejemplo, extraordinario, muestra lo valioso que es divulgar entre el gran público el hecho de que ha habido y hay mujeres vinculadas a la construcción, como autoras, de conocimiento matemático de primer orden. Sin embargo, no basta con la divulgación. Es aún más valioso promover la necesidad urgente de la acción social en la transformación de la institución matemática para acabar con la exclusión sistémica de las mujeres en ese ámbito.

Estudios serios en sociología de la ciencia han evidenciado la persistencia de la misoginia en el ámbito de las matemáticas entendidas como profesión científica. No exagero al afirmar que, *estructuralmente, el ámbito institucional de la ciencia matemática ha sido configurado para evitar que las mujeres alcancen posiciones de poder.*

Me explico. Desde la infancia las mujeres reciben un mensaje social persistente que las incentiva a cancelar sus expectativas con respecto a las matemáticas vistas como vocación y como profesión. Este fenómeno se da a nivel mundial, incluso en los países más igualitarios, en los que, sin embargo, el patriarcado sigue aún limitando el progreso social de las mujeres.

Prueba de ello es el hecho de que hasta ahora sólo dos mujeres han sido premiadas con la Medalla Fields. Esto sucedió por primera vez en el año 2014 con la asignación del premio a la recientemente fallecida profesora iraní de la Universidad de Stanford, California, Estados Unidos, Maryam Mirzakhani. Esto significa simple y llanamente que la comunidad matemática mundial consideró que de entre todas las mujeres dedicadas en 2014 a la investigación matemática —que no son muchas en comparación con el número de hombres—, sólo Maryam Mirzakhani

merecía ser ubicada en la cumbre de su profesión. Es por demás obvio que al ser muy pocas las mujeres que detentan posiciones de poder en la ciencia matemática, los intereses de las mujeres tendrán gran dificultad para ser respetados y promovidos.

En lo que concierne al segundo caso, en el año 2022 se le otorgó la Medalla Fields a la matemática ucraniana Maryna Viazovska, profesora en la Escuela Politécnica Federal de Lausana, Suiza. Desde su lanzamiento en 1936 hasta el año 2022 se ha entregado la Medalla Fields sesenta y cuatro veces y sólo en dos ocasiones se le ha otorgado a mujeres; esto es, 1.28 % del total. Me es triste afirmar que en la conformación del *habitus* del matemático, deseada por el imaginario social y materializada por la estructura institucional del campo social de las matemáticas, lo que atañe a las mujeres ocupa un lugar muy pequeño. En relación con esta patología social, complemento lo ya discutido con lo que expongo en el recuadro 6.

En lo que respecta a México, el caso de Enriqueta González Baz muestra de manera clara las dificultades con las que se han encontrado las matemáticas profesionales en nuestro país. Nacida en 1915, al terminar la escuela secundaria su padre consideró que debía seguir una formación práctica orientada a hacer de ella una mujer de familia, en el sentido patriarcal dominante en la época. Ella estuvo en una institución conocida como la *Escuela Doméstica* durante dos años y allí aprendió, junto con su hermana, además de primeros auxilios, a cuidar niños y a cocinar. Sin embargo, en 1937 logró finalizar sus estudios de bachillerato en la Escuela Nacional Preparatoria, ubicada en el Antiguo Colegio de San Ildefonso, y en paralelo se formó como maestra de educación primaria en la Escuela Nacional de Maestros.

Posteriormente ingresó a la recién creada Escuela Nacional de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). dicha escuela, integrada a la Facultad de Ingeniería, estuvo ubicada en el Palacio de Minería del Centro Histórico de la Ciudad de México y es el antecedente de la actual Facultad de Ciencias de la UNAM. Durante sus estudios superiores en esta institución Enriqueta González Baz obtuvo la formación matemática requerida para recibir en 1943 un

**Recuadro 6.** Matemáticas y asuntos de género

El maltrato a las mujeres en las matemáticas es un asunto que ha llamado poderosamente la atención de individuos y de instituciones en tiempos recientes; esto en el marco de la defensa de los derechos de las mujeres. En ese contexto, en el año 2011 el Instituto Nacional de Ciencias Matemáticas del Consejo Nacional para la Investigación Científica de Francia (CNRS, por sus siglas en francés), reportó que únicamente el 14.6 % de los matemáticos dedicados a la investigación pertenecientes al CNRS eran mujeres. El reporte indica que las matemáticas eran en aquel entonces el campo de estudio en las universidades francesas que tenía menor participación femenina. Siendo Francia uno de los países con mayor apego social a las matemáticas (lo cual no impidió la discriminación institucional que sufrió Sophie Germain en los tiempos de gloria de Carl Friedrich Gauss), y también siendo uno de los países que más han aportado en las últimas décadas a la disminución de la desigualdad de género, uno puede imaginarse la situación en países con una cultura patriarcal menos debilitada. A este respecto, en un estudio publicado en 2019 se reporta que en la prestigiosa Universidad de Harvard tan sólo el 4 % del profesorado del más alto nivel en el campo de las matemáticas está constituido por mujeres. Existen evidencias serias de cómo la estructura social patriarcal, aún dominante, coarta el derecho de las mujeres a elegir de manera libre su trayecto educativo y con ello determinar su quehacer profesional. En el imaginario social dominante las mujeres suelen ser ubicadas en actividades promovidas como *femeninas*, entendidas éstas como aquellas que entrañan el cuidado del bienestar de otros (crianza y educación de los niños, dedicación a lo doméstico, por dar dos ejemplos), y que excluyen aquellas caracterizadas por un uso prioritario de la reflexión compleja. Así pues, sin duda queda mucho por hacer para evitar que el machismo pernicioso sea, como lo sigue siendo hasta ahora, una de las características principales del ámbito profesional de las matemáticas, muy por encima de la supuesta excentricidad de sus exponentes.

grado equivalente a lo que hoy en día es una maestría en ciencias en matemáticas.

Más tarde, Enriqueta realizó estudios doctorales en la universidad privada femenina de Bryn Mawr en Pensilvania, entre 1944 y 1947, bajo la supervisión de la matemática estadounidense Anna Johnson Pell Wheeler, especialista en álgebra lineal en dimensiones infinitas. Durante sus estudios investigó aspectos tales como la convergencia absoluta de series de Fourier y la teoría de redes, publicando algunos de sus resultados en la revista científica *Mathematical Reviews* de la Sociedad Estadounidense de Matemáticas (en inglés: American Mathematical Society). La existencia de dichas publicaciones justifica que se reconozca a González Baz como la *primera matemática profesional en México*. En esto coinciden diversas semblanzas, entre ellas la elaborada por la Sociedad Matemática Mexicana, de la cual fue una de las fundadoras en junio de 1943.

A su regreso a México se integró en 1948 al Instituto de Física de la UNAM como investigadora asistente, y a lo largo de los años su actividad básica consistió en impartir clases, incluyendo en la Escuela Nacional Preparatoria y la Escuela Normal de Maestros. No pude hallar ninguna información que la vinculara con actividades de investigación en matemáticas, aunque sí encontré en su semblanza elaborada por la UNAM estas líneas: “...cuando Enriqueta decide inscribirse y pertenece a una de las primeras generaciones, en grupos de tres o cuatro alumnos, en que las mujeres se distinguían por su dedicación y empeño, sobresaliendo por su capacidad, inteligencia y hermosura la joven González Baz” (véase <https://matematicos.matem.unam.mx/historia/matematicas-en-el-siglo-xx/mujeres-pioneras-de-la-sociedad-matematica-mexicana>).

Nada se dice de sus intereses científicos, ni del contenido de sus publicaciones, sino que se hace hincapié en su aspecto físico. Esto no sorprende, pues la perspectiva machista permea la inmensa mayoría de los estudios sobre la historia de las matemáticas, no sólo en México, sino también a nivel internacional. Seguramente el machismo es la razón por la cual la primera matemática mexicana no continuó las investigaciones realizadas durante sus estudios doctorales, dedicándose básicamente a la enseñanza. En dicha semblanza, al igual que la que se encuentra

disponible en el sitio web dedicado a biografías de integrantes de la comunidad matemática internacional, mantenido por la Universidad de Saint Andrews en Escocia, se destaca que ella tradujo al español el libro *Topología* del influyente matemático estadounidense de origen ruso Solomon Lefschetz, quien tuvo un papel muy importante en la formación de matemáticos mexicanos (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baz/>), tanto en la UNAM como en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Espero que lo que he venido exponiendo justifique por qué siento que resulta impostergable la articulación de una agenda claramente feminista que ponga un alto definitivo a la dominación masculina en el ámbito de las matemáticas. Es necesario e indispensable que la institución matemática se transforme para corregir una injusticia que ha durado ya demasiado tiempo.

En el recuadro 7 reviso, como homenaje sincero de mi parte, la notable trayectoria vital de la matemática feminista rusa Sofia Kovalévskaya, una matemática extraordinaria y uno de los ejemplos más notables de las mujeres que a lo largo del tiempo han contribuido a debilitar el dominio masculino en esta importante institución sociocultural.

Como puede verse, las matemáticas, como institución, padecen de graves patologías sociales que requieren ser tratadas con urgencia. El elitismo que ha caracterizado hasta nuestros días a las matemáticas, lejos de ser virtuoso, es un síntoma evidente de la enfermedad social que la afecta. No todos los imaginarios culturales que se nutren de las matemáticas están sanos.

## MI INTENCIÓN

Este escrito, acotado en su extensión y en sus ambiciones, no pretende resolver las patologías sociales y los deslices del imaginario social que he presentado brevemente, sin que esto signifique el ocultamiento de su presencia ominosa. Lejos está de ello. Su objetivo radica esencialmente en proponer una visión crítica y divertida de los modos consagrados del razonamiento matemático, sin renegar de la perspectiva occidental,

**Recuadro 7.** La pasión de Sofía Kovalévskaya

En el ámbito de las matemáticas el dominio ejercido por los hombres no ha estado exento de resistencia. Entre las primeras mujeres que incursionaron en la ciencia matemática, tal y como la comprendemos ahora, está la matemática y escritora rusa Sofía Kovalévskaya. Perteneciente a una familia de la baja nobleza rusa e inmersa desde la infancia en el mundo de la cultura y de la ciencia, fue la primera mujer que obtuvo el grado doctoral en matemáticas. Esto a los 24 años de edad en la Universidad de Gotinga en Alemania, país donde se formó puesto que las universidades rusas no permitían la presencia de mujeres. Su disertación, supervisada por Karl Weierstrass y presentada *in absentia*, incluyó resultados en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales y en el de las integrales elípticas, así como aportes a las ideas de Pierre-Simon Laplace en torno a la dinámica de los anillos de Saturno. A ella se le debe un teorema importante, conocido como teorema de Cauchy-Kovalévskaya, que establece las condiciones de existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuyos coeficientes son funciones analíticas, el cual ha sido aplicado en diversos campos de la física. Sus méritos científicos la llevaron en 1889 a obtener un puesto de profesora en la Universidad de Estocolmo, siendo la primera mujer en alcanzar tal distinción en Europa. Esto pese a la misoginia imperante en esa época. Años atrás el escritor y dramaturgo sueco August Strindberg manifestó públicamente y de manera grosera y violenta su oposición al reclutamiento de Sofía Kovalévskaya. En los pocos años que vivió –pues murió a los 41 años de complicaciones respiratorias ligadas a la pandemia de influenza de los años 1889-1890–, dedicó grandes esfuerzos tanto a ubicarse en el mundo académico como a la militancia en causas sociales que le fueron importantes. Incluso participó atendiendo a heridos del bando revolucionario en la Comuna de París, el movimiento insurreccional que tomó el control de esa ciudad del 18 de marzo al 28 de mayo de 1871, acompañando a su hermana, la feminista Anna Jaclard, amiga de Karl Marx y de Fiódor Dostoyevski.

ilustrado aquí mediante la revisión de la demostración formal de diez teoremas matemáticos. La presente selección de dichas declaraciones matemáticas, así como de sus respectivas demostraciones, se justifica porque han sido fundamentales en la evolución de la ciencia matemática y también porque son fáciles de comprender, sin que ello conlleve un gran esfuerzo —hasta cierto punto—, puesto que no se requiere de un gran bagaje matemático para abordarlos. Ese es precisamente el aspecto más importante de mi elección. Sé muy bien que es cierto que demostrar un teorema matemático en general no es fácil, aunque esto no implica que no pueda ser divertido. Valdrá por ello siempre la pena intentarlo. Ya le corresponderá al lector juzgar si el cometido perseguido en este volumen se cumple o no. Espero que sí. Antes de pasar a las demostraciones, haré una revisión sucinta de la relación que guardan las matemáticas con los así denominados *sistemas formales*, para ubicarlas con precisión en su contexto científico, y revisaré, también brevemente, algunos aspectos que considero importantes en torno a su significación cultural y que se relacionan con la promoción de los modos de razonamiento involucrados.

## MATEMÁTICAS Y SISTEMAS FORMALES

No deja de ser por demás curioso que no exista hasta la fecha una definición universalmente aceptada de lo que se entiende por matemáticas. Esto, además de ser sorprendente, no deja de ser paradójico, ya que las matemáticas han hecho precisamente de *las definiciones* una de sus sustancias principales de trabajo. Aunque no existe una definición consensuada, a las matemáticas se les suele presentar en el entorno académico como una más de las *ciencias formales*. Estas, además de las matemáticas, son hasta ahora:

- la lógica,
- la teoría del cómputo,
- la inteligencia artificial,
- la teoría de la información,

- la teoría de sistemas,
- la teoría de la decisión,
- la lingüística teórica.

Cabe mencionar que hasta hace no mucho tiempo a la lógica se le consideraba parte integral de las matemáticas, aunque este ya no es el caso. Como una más de las denominadas ciencias formales, las matemáticas se sirven del diseño de sistemas como una herramienta para categorizar el conocimiento y *no requieren de evidencia empírica* para llegar a conclusiones calificadas como válidas. *La autonomía con respecto a la evidencia empírica es la característica más importante de las matemáticas desde la perspectiva epistemológica, y eso es lo que hace de ellas una ciencia formal.*

Sin embargo, no deja de ser paradójico, una vez más, que una de las razones que más se utilizan para promover socialmente a las matemáticas radica en su utilidad percibida y demostrada para describir de manera eficiente fenómenos complejos, esto es, para dar sentido a las hipótesis y evidencias empíricas que les están asociadas.

Como ciencia formal las matemáticas constituyen entonces un campo de estudio que genera conocimiento sirviéndose para ello de *sistemas formales*. Ante una presentación como esta, que presupone que uno sabe lo que es la ciencia –en el recuadro 8 incluí un breve recordatorio de este tema–, surge entonces de inmediato el cuestionamiento siguiente: ¿qué es un sistema formal? Intentaré una respuesta no demasiado rebuscada a esta pregunta. En general un sistema, cualquier sistema, formal o no, es un conjunto concreto de entidades que interactúan las unas con las otras de acuerdo con ciertas reglas bien definidas y que está caracterizado por cuatro propiedades esenciales:

- 1) Está bien delimitado; esto es, se sabe lo que es y lo que no es parte de él.
- 2) Posee interacciones bien definidas con su entorno.
- 3) Tiene funciones específicas, que definen lo que pueden o no hacer las entidades que lo constituyen.
- 4) Cuenta con recursos específicos para su operación.

**Recuadro 8.** ¿Qué es la ciencia?

La ciencia se entiende en este volumen como el proceso social de generación de conocimientos, consensualmente calificados como objetivos, que informan sobre fenómenos presentes en el universo. Esto mediante la aplicación sistemática de un método específico de indagación explicativa y de construcción de conocimientos basados en observaciones y razonamientos rigurosos y verificables. La verificabilidad de las respuestas provistas por la ciencia a cuestionamientos en torno a los principios que rigen los fenómenos del universo es su principal característica. En general el conocimiento construido por la ciencia tiene únicamente validez temporal y la temporalidad depende de la adquisición de nuevo conocimiento que lo reemplace. Esto implica que el conocimiento científico es continuamente mejorable, lo cual se asegura por la integración de la falsabilidad como característica fundamental de las teorías científicas. Esto es, toda proposición científica debe poder ser refutada, lo cual garantiza la inexistencia de verdades absolutas en la ciencia. Por ello, un resultado científico no puede juzgarse como verdadero, sino a lo sumo como no refutado. La noción de objetividad científica, íntimamente ligada al método de adquisición y construcción de conocimiento aplicado, se sustenta en la verificabilidad. Cada área de la ciencia depende de una mecánica de verificación de la validez de lo que postula que le es propia, lo que en el caso de las denominadas ciencias experimentales se asocia a la realización de experimentos controlados, orientados a la verificación de hipótesis explicativas, por ejemplo. En este caso la verificabilidad toma la forma de la reproducibilidad, esto es, la capacidad que posee un experimento dado de ser reproducido por otros. La hiper especialización asociada a cada área de la ciencia, así como la necesidad en cada área de servirse de métodos de indagación y de verificación específicos, lleva a postular la necesidad de hablar de *ciencias*, así en plural, y no de ciencia en singular. En tanto que constructos sociales, las ciencias y sus métodos de validación evolucionan con el tiempo, condicionados por lo social.

La noción de sistema se encuentra asociada con una de las características más importantes de nuestra mente, la cual radica en nuestra capacidad cognitiva para parcelar el universo al abordar su comprensión. Cada una de las parcelas que decidimos detectar (y en lo posible también comprender) es a lo que llamamos justamente sistema, que es ante todo una fuente potencial de información.

Así pues, *todo sistema es una abstracción sometida al actuar de nuestra curiosidad.*

Junto con esta habilidad, otra gran capacidad cognitiva que poseemos es la que se centra en clasificar lo que aprendemos, que nos facilita la organización *sistemática* del conocimiento que adquirimos. Esa es la razón por la que hemos elaborado clasificaciones de los sistemas. Aun cuando existe en la literatura especializada una gran diversidad de clasificaciones, en este volumen sólo consideraré una de ellas. En función de la naturaleza de los componentes constitutivos, se puede dividir así la infinidad de los sistemas detectables, imaginables o perceptibles en dos grandes categorías:

*Sistemas concretos:* compuestos de entidades reales.

*Sistemas conceptuales:* compuestos de entidades que son producto del pensamiento, también denominados *sistemas abstractos*.

De manera intuitiva se pueden enumerar una gran cantidad de sistemas concretos, por ejemplo:

- un gato;
- una planta;
- un pulpo;
- una ciudad;
- un restaurante;
- el sistema educativo de un país;
- un cultivo agrícola;

- una computadora;
- una obra de arte;
- el sistema operativo de una computadora;
- un hospital;
- una religión específica;
- una nube;
- el sistema judicial de un país concreto;
- un libro específico dedicado a las matemáticas.

Todos estos ejemplos comparten el estar compuestos por elementos concretos, esto es, *reales* en el sentido comúnmente aceptado. En cuanto a los sistemas conceptuales, su composición no incluye elementos concretos, sean o no físicos, sino básicamente *ideas* y *conceptos*. Por ello se dice que son abstractos y en consecuencia compuestos únicamente de información.

Al ser una ciencia formal, las matemáticas se sirven de los sistemas formales para generar la clase de conocimiento que le concierne, los cuales constituyen una clase particular de sistemas conceptuales, que se caracterizan por estar constituidos por dos grandes entidades; a saber:

*Un lenguaje formal*: consistente en palabras cuyas letras son tomadas de un alfabeto y que están formadas de acuerdo con un conjunto específico de reglas.

*Un conjunto de reglas de inferencia*: funciones que toman premisas, analizan su sintaxis y devuelven una conclusión.

Además de estos dos componentes, que son comunes para todos los sistemas formales, existe un subconjunto de los sistemas formales que poseen adicionalmente una *semántica formal*; esto es, una manera de interpretar el significado de las palabras compuestas con los elementos del alfabeto asociado y que se utiliza para deducir o demostrar proposiciones

de verdad demostrable y dar además una definición rigurosa del concepto de tal demostración. Este es precisamente el caso de las matemáticas, como lo puntualizo en el recuadro 9.

Se puede afirmar, por tanto, que *las matemáticas trabajan entonces para producir conocimiento, con sistemas formales que poseen semántica formal*.

Debido a la naturaleza formal de las matemáticas hay quienes simplifican al extremo su definición, negándoles su estatus científico, afirmando que son únicamente un lenguaje formal *simplificado* y dotado de una herramienta específica para cada problema que se aboca a resolver. Tal posicionamiento suele asociarse a un militante rechazo de las matemáticas como herramienta de construcción del conocimiento en el ámbito de las ciencias sociales. Este rechazo se ha manifestado incluso en el ámbito de la economía matemática.<sup>9</sup> En mi caso no emplearé de esta definición, que implica que las matemáticas no son una ciencia *sino una herramienta cognitiva de procesamiento de información*. Mantendré aquí mi neutralidad con respecto a la valía potencial de tal consideración.

En lo que sigue dedicaré algunos párrafos a revisar el porqué de la significación cultural virtuosa que caracteriza a las matemáticas, ante todo insistiendo en lo que representan como terreno predilecto de entrenamiento de la capacidad humana para razonar de manera rigurosa y sistemática en términos hipotético-deductivos. Este es el aspecto central de mi posicionamiento con respecto al significado cultural virtuoso de las matemáticas.

## SIGNIFICACIÓN CULTURAL DE LAS MATEMÁTICAS

Más allá de sus variadas definiciones, con diversos grados de formalismo, no exagero al afirmar que las matemáticas, como constructo social, poseen un lugar de excepción en la cultura y que éste va más allá de su innegable utilidad práctica, que la tienen, ¿quién podría dudarlo? De las

<sup>9</sup> La economía matemática aplica métodos matemáticos para representar teorías y analizar problemas en el ámbito de la economía. El economista y físico francés Maurice Allais, Premio Nobel de Economía en 1988 y uno de los fundadores de la economía matemática contemporánea, alertó en su momento del riesgo de que la matematización del pensamiento económico lo alejase de la economía real, dando lugar a una práctica científica concentrada en modelos económicos abstractos e incluso utópicos.

**Recuadro 9.** Sistemas formales y lógica

Los sistemas formales dotados de una semántica formal se caracterizan por formular proposiciones lógicas, por lo cual también se suele hablar de los sistemas formales como *sistemas lógicos*; es decir, cadenas de signos expresadas en el lenguaje formal asociado, que poseen contenido semántico y a las que bajo un procedimiento lógico determinado se les asigna un valor de verdad derivado de premisas. En los sistemas formales dotados de semántica formal el valor de verdad de una declaración demostrable suele tener únicamente dos posibilidades: verdadero o falso. Este es el caso que acontece en las matemáticas, que sólo aceptan una posibilidad para una declaración dada: esta es verdadera o es falsa, dadas las premisas. En este sentido, se habla de la verdad en matemáticas como *verdad formal* y no se admite ninguna relativización a este respecto. ¿Cómo se determina entonces si una declaración matemática dada *demostrable* es formalmente verdadera o falsa? La verdad formal se concluye mediante un procedimiento válido de verificación a partir de las premisas. Ni éstas ni el procedimiento lógico de reducción para llegar a la verdad formal pueden separarse de la declaración. En virtud de la naturaleza formal de la verdad en las matemáticas, se ha llegado a considerar que éstas están fuera del ámbito de la ciencia, ya que la construcción del conocimiento matemático no está sometida a la necesidad de la falsabilidad, que suele considerarse, junto con la verificabilidad, como uno de los dos pilares fundamentales de la ciencia en términos epistemológicos. Así pues, en términos estrictamente epistemológicos, el hecho de que una vez demostrada una declaración matemática no se admita la refutación al valor de verdad establecido pone entonces en duda la naturaleza científica del conocimiento matemático.

cuentas de los gastos del hogar a la elaboración de pronósticos climatológicos y epidemiológicos, pasando por la tecnología de aprendizaje computacional de los algoritmos de la inteligencia artificial contemporánea y la regulación precisa del movimiento de naves espaciales, los métodos

matemáticos de análisis y de procesamiento de la información son omnipresentes. Las matemáticas son útiles porque auxilian en la resolución de problemas de diversa índole. Esto es cierto, aunque su significación cultural tiene otros orígenes, que han marcado con gran intensidad a los imaginarios culturales involucrados.

Quizás el pedestal en el que se ha colocado a las matemáticas en la mente social –que no comparte con ninguna otra de las ciencias, formales o no– debe mucho a su utilidad, por demás asombrosa, para comprender aspectos sumamente complejos de la realidad física, esto es, *como herramienta para conocer*. El descubrimiento de esta capacidad de las matemáticas asombró a los primeros experimentalistas en la etapa inicial de emergencia de la ciencia moderna. Fue el astrónomo, físico e ingeniero Galileo Galilei, pionero del método científico experimental, quien afirmó en su tiempo –primera mitad del siglo XVII– que el libro de la naturaleza estaba escrito en el lenguaje de las matemáticas. Esta aseveración, hecha por quien priorizó la observación en el proceso de comprensión del universo, en contraposición a la perspectiva escolástica derivada de Aristóteles, marcó el devenir de la ciencia. Esto en el marco de la consolidación en Occidente de la agenda civilizatoria promovida por los pensadores del Siglo de las Luces, el gran esfuerzo intelectual que colocó a la razón en el centro del esfuerzo humano por comprender la realidad. Por ello no se puede hablar de la Ilustración sin mencionar la corriente filosófica que la definió en la historia del pensamiento: *el racionalismo*. Éste, promovido por el filósofo y matemático francés René Descartes, empleó el pensamiento lógico y matemático para moldear una perspectiva del estudio de la realidad que unió la perspectiva geométrica y logicista cultivada en la Antigua Grecia con el empirismo iniciado por Galileo Galilei, para así dar forma al andamiaje de lo que hoy en día conocemos como pensamiento científico. A esto se agrega el colapso de la metafísica, alcanzado en el siglo XVIII por el filósofo prusiano Immanuel Kant, que significó en Occidente la eliminación de la utilidad de la filosofía en la elucidación de los principios que rigen los modos de ser y de manifestarse de la realidad material. El triunfo espectacular de las matemáticas como herramienta para comprender los principios que rigen la realidad física tiene su

manifestación más esplendorosa en la elaboración de la ley de la gravitación universal por Isaac Newton, reportada en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, publicada el 5 de julio de 1687 y considerada por muchos no sólo como uno de los textos científicos más importantes de la historia, sino el más importante. Los modos de razonamiento matemático, de corte geométrico, expuestos en el libro fueron elaborados intencionalmente por Isaac Newton, teniendo a los *Elementos* de Euclides como modelo de referencia. De esa manera él reclamó con éxito un lugar excepcional en la historia cultural de Occidente, no sin que esto acarrearara algunas consecuencias negativas, como lo expongo en el recuadro 10.

## EL PODER SIMBÓLICO DE LAS MATEMÁTICAS

Me parece que en lo expuesto precedentemente queda claro el poder simbólico alcanzado por las matemáticas. Más allá de sus obvias aplicaciones tecnológicas y científicas, han terminado por generar su propio universo conceptual, regido por la abstracción y dominado por los matemáticos. Sus campeones han cultivado con ahínco y gran habilidad la arrogancia, y eso explica por qué el matemático y físico prusiano Carl Friedrich Gauss, una de las deidades del panteón de los matemáticos, la denominó la *reina de las ciencias*, ante todo por su éxito notable e indiscutible en la elucidación de algunos de los principios que rigen la realidad física. Cabe mencionar que en el imaginario intelectual las matemáticas desplazaron durante *la Modernidad* el papel que tuvo la teología, a la que el teólogo y filósofo católico italiano Tomás de Aquino calificó como la reina de las ciencias. Es claro que los promotores más notables de las matemáticas han sido los matemáticos, y la sociedad ha aceptado en gran medida su preeminencia, hasta hacer de ellos una suerte de sacerdotes del racionalismo, a quienes se les puede perdonar incluso los comportamientos más excéntricos. Afortunadamente, han existido matemáticos notables que, lejos de ser excéntricos o estar cegados por los excesos de la arrogancia, han aprovechado hábilmente el aura mágica que las matemáticas poseen en el imaginario colectivo de Occidente para promover el humanismo en su mejor expresión. Uno de ellos fue sin duda el asombroso

**Recuadro 10.** La perniciosa influencia del mecanicismo newtoniano

La demostración por Isaac Newton de las posibilidades del pensamiento matemático en la elucidación de los fenómenos naturales –tales como los relativos a la dinámica orbital de los cuerpos celestes, su motivo principal de estudio– fijó en el imaginario occidental el papel cuasi-mágico de las matemáticas. Con ello el racionalismo triunfante que definió a la Ilustración en el siglo XVIII aceleró el debilitamiento de la cultura autoritaria asociada a lo eclesiástico. La perspectiva newtoniana sobre la indagación de los fenómenos propios de la mecánica celeste, promovida en Europa por Voltaire (esto es, François-Marie Arouet), fue rápidamente difundida a los más diversos ámbitos de actividad humana, incluyendo lo que concierne a lo moral y a lo político, a través del uso metafórico del concepto de fuerza. Esta idea permitió a la intelectualidad occidental formular construcciones teóricas con base en la noción de equilibrio. Por ello seguimos hablando hasta nuestros días de fuerzas sociales y de equilibrio económico, por ejemplo. A este proceso de adopción cultural generalizado del pensamiento newtoniano se lo ha denominado mecanicismo newtoniano, que marcó históricamente la instauración de las matemáticas como medio ideal de comprensión de la realidad. La consecuente matematización de la ciencia física estableció de manera firme el estándar con el cual toda la ciencia habría de medirse, lo cual ha sido hasta ahora una carga muy pesada para la legitimación social de culturas epistémicas que no colocan al racionalismo absoluto en su centro. Sin olvidar que el racionalismo mecanicista coadyuvó a la consolidación de la voluntad hegemónica de Occidente, facilitando el expansionismo europeo, lo cual a su vez permitió el nacimiento del industrialismo y con ello la emergencia del capitalismo de corte anglosajón, promotor del individualismo a ultranza, que ha prohiado la nociva sociedad del hiperconsumo en la que estamos inmersos. Aunque las relaciones causa-efecto en estas interacciones sean discutibles, es innegable que la influencia del racionalismo mecanicista dista mucho de ser sólo positiva.

pensador británico Bertrand Arthur William Russell, quien no sólo exploró la construcción de los fundamentos de las matemáticas –gracias a lo cual influyó decididamente en la forma moderna de la lógica simbólica–, sino que también fue uno de los fundadores de la filosofía analítica. Asimismo, fue un notable pacifista militante y un defensor sin tregua de la libertad de expresión, lo que lo llevó a afirmar en su escrito *Libre pensamiento y propaganda oficial* (en inglés: *Free Thought and Official Propaganda*, publicado en 1922):

Ninguna de nuestras creencias es completamente cierta; todas tienen al menos una penumbra de vaguedad y de error. Los métodos para aumentar el grado de verdad en nuestras creencias son bien conocidos; consisten en escuchar a todas las partes, tratar de determinar todos los hechos relevantes, controlar nuestro propio sesgo discutiendo con personas que tienen el sesgo opuesto y cultivar la disposición a descartar cualquier hipótesis que haya resultado inadecuada. Estos métodos se practican en la ciencia y han desarrollado el cuerpo del conocimiento científico. Todo hombre de ciencia cuya perspectiva es verdaderamente científica está listo para admitir que lo que pasa por conocimiento científico en este momento seguramente requerirá corrección con el progreso del descubrimiento; sin embargo, está lo suficientemente cerca de la verdad para servir para la mayoría de los propósitos prácticos, aunque no para todos. En la ciencia, donde sólo se puede encontrar algo parecido al conocimiento genuino, la actitud de los hombres es tentativa y llena de dudas.

Me parece que estas palabras de Bertrand Arthur William Russell invitan a los científicos, incluyendo a los matemáticos, a considerar su quehacer con humildad. A riesgo de sonar prescriptivo, aprovecho para externar que considero que en las matemáticas debe prevalecer el pensamiento crítico lúdico y no la razón arrogante. Además, pienso que se gana mucho al hacer a un lado la solemnidad que suele enturbiar su comprensión.

Antes de enlistar las declaraciones matemáticas elegidas, dedicaré algunos párrafos a lo que defiendo como la significación cultural legítima de las matemáticas, a saber: su papel como medio para encauzar el razonamiento en el proceso de construcción de verdades formales.

## LAS MATEMÁTICAS: TERRENO DE JUEGO DEL RAZONAMIENTO

¿Está todo dicho en cuanto a la significación cultural de las matemáticas? ¿Basta con hablar de la excentricidad de algunos de sus exponentes o de sus consecuencias en la conformación del tejido social? No necesariamente. Hay un aspecto de las matemáticas que pienso les es esencial y que explica su significación cultural legítima. Este aspecto concierne a su relación estrecha con nuestra capacidad de servirnos del razonamiento *encauzado* para afirmar de manera certera la veracidad *formal* de un enunciado matemático. Las matemáticas ofrecen así la oportunidad de delimitar mediante el ejercicio de la razón dominios del conocimiento en los que rige la verdad.

En efecto, *la demostración razonada de declaraciones es la esencia profunda de las matemáticas, que son ante todo un juego que se gana al llegar a un resultado irrefutable, si es que se han respetado irrestrictamente las reglas que le están asociadas.*

Es este aspecto lúdico de las matemáticas el que me concierne en este volumen. Es por ello que he elegido resaltarlo mediante la revisión de las demostraciones de diez teoremas matemáticos considerados por la comunidad matemática como clásicos. Esto en el sentido de que su formulación determinó la evolución de la ciencia matemática. Los elegí ante todo porque pienso que son divertidos y también porque son fáciles de comprender y sobre todo fáciles de demostrar (salvo los últimos dos ...). Para disfrutar un juego la mejor estrategia es jugarlo y evitar en un principio exigirse demasiado. He hecho hincapié arriba en el razonamiento *encauzado* para puntualizar que la construcción de conocimiento matemático obedece a reglas precisas que se respetan sin renunciar al ejercicio creativo de la duda. Todo juego las tiene y la diversión depende en gran medida de su respeto. Nada más placentero que poder afirmar que algo es cierto, en un sentido bien establecido, y poder demostrarlo.

En lo que sigue listo los teoremas elegidos especificando su origen, completando lo que he ya comentado en torno a ellos en la “Introducción”.

## LOS DIEZ TEOREMAS ELEGIDOS

Estos son los diez teoremas elegidos para mostrar en este volumen el aspecto lúdico de las matemáticas, aunque sin renunciar por ello al rigor de la formalización, característica principal de las matemáticas:

## TEOREMA 1

*La suma de los primeros  $n$  números enteros naturales es igual a la mitad del producto de  $n$  por  $n + 1$ .*

Nada más sencillo que sumar números enteros: 1 más 2 es igual a 3, 3 más 3 es igual a 6, 6 más 4 es igual a 10, y así sucesivamente. Esto no es para nada complicado, aunque puede ser muy tardado si ejecutamos las sumas a mano y los números que hay que sumar son muchos. Esta declaración, que implica la suma de números incluidos en una sucesión numérica ordenada, ha entrado en la leyenda de las matemáticas al relacionarse con la precocidad de Carl Friedrich Gauss, el denominado *príncipe de las matemáticas*.

## TEOREMA 2

*Todo número racional se puede expresar como una fracción irreducible.*

En la Antigua Grecia se caracterizó inicialmente a los números como entidades completas, que se correspondían con longitudes. Esto es, tenían un sentido asociado a la longitud conmensurable de una cuerda abstracta, lo cual establecía una diferencia conceptual entre lo que se entendía por número y lo que se entendía por cantidad. Al perfeccionarse la descripción, se propusieron las fracciones, es decir, cocientes de números completos, y se planteó entonces el cuestionamiento de si existía para un número dado una representación como fracción más simple que cualquier otra representación. Este teorema provee la respuesta definitiva.

## TEOREMA 3

*La raíz cuadrada del número 2 no es un número racional.*

Uno de los descubrimientos más importantes y perturbadores de las matemáticas en la Antigüedad: la comprobación irrefutable de que

existen números que no se pueden representar como fracciones. El descubrimiento también marcó el triunfo de la visión geométrica sobre lo algebraico en la Antigua Grecia, condicionando en Occidente la evolución de la exploración de lo matemático hacia lo abstracto. Aunque la demostración de esta declaración es simple, no deja de ser un ejemplo contundente del poder del razonamiento hipotético-deductivo.

#### TEOREMA 4

*En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Este es el teorema que suele molestar a muchos estudiantes de educación secundaria, básicamente porque no se los invita a comprender su significación profunda. Suele ser su primera confrontación con la demostración de declaraciones matemáticas. Se ama o se odia el teorema, pero no deja indiferente a nadie que lo haya conocido.

#### TEOREMA 5

*El cociente hipotenusa/cateto en un triángulo rectángulo isósceles es igual a  $\sqrt{2}$ .*

Una declaración inofensiva y como se verá no muy complicada de demostrar, que al seguirle la pista nos lleva al misterioso número  $\pi := 3.1415926 \dots$ , a través de la noción de invariancia, de propiedades específicas de objetos matemáticos con respecto a clases específicas de transformaciones.

#### TEOREMA 6

*La media geométrica de dos números positivos es menor o igual a su media aritmética.*

Una propiedad derivada de las restricciones a las que es sometido un triángulo inscrito en un círculo, y que me servirá de pretexto para explorar algunos aspectos de la relación que establecieron los matemáticos de la Antigua Grecia con la música, uniendo el razonamiento al placer.

## TEOREMA 7

*Teorema fundamental de la aritmética.*

Los números enteros se pueden descomponer como el producto de una clase de números que poseen propiedades que han apasionado a los matemáticos a lo largo ya de siglos: *los números primos*. Una declaración matemática que ha influido en numerosos dominios de la ciencia, que van desde la transmisión segura de mensajes hasta la dinámica de adaptación a las exigencias del entorno de ciertas clases de insectos.

## TEOREMA 8

*La suma de los ángulos de todo triángulo en geometría euclidiana es igual a  $180^\circ$ .*

Esta declaración clásica se deriva directamente de una aseveración incluida por Euclides en los *Elementos*, y cuyo estatus ha sido motivo de debate hasta nuestros días, al cuestionarse si algo que es evidentemente verdadero no requiere, sin embargo, de ser demostrado.

## TEOREMA 9

*Sólo existen 5 poliedros regulares convexos.*

Se considera que fue la demostración de esta declaración lo que motivó la escritura de los *Elementos* por parte de Euclides, para formalizar las creencias de Platón (c. 427-347 a.C.) en torno a estos objetos matemáticos. Este resultado es, sin lugar a dudas, un buen pretexto para reflexionar sobre la sacralización del conocimiento matemático, así como para abordar lo relativo a la relación que guardan las matemáticas con la estética.

## TEOREMA 10

*Una esfera tiene dos tercios del volumen del cilindro en el que se inscribe.*

La demostración de esta declaración matemática se debe a Arquímedes, quien la incluyó en su tratado *Sobre el cilindro y la esfera*, uno de los nueve cuyo contenido sobrevive hasta nuestros días. De acuerdo con el historiador romano de origen griego Plutarco, Arquímedes estaba tan orgulloso de su demostración que pidió se labrara en su tumba una figura

alusiva a manera de epitafio. Aprovecho la demostración de esta declaración para reflexionar sobre lo que se entiende como *obra maestra* en matemáticas.

Estas diez declaraciones son ejemplos clásicos en el ámbito de las matemáticas. Podría haber elegido otras declaraciones, aunque considero que las demostraciones elegidas para cada uno de ellos constituyen un buen muestrario de las estrategias de razonamiento hipotético-deductivo que subyacen a la construcción del conocimiento matemático. Como se verá más tarde, prevalece por decisión propia en mis elecciones la perspectiva fundamentada en el uso de conceptualizaciones geométricas, con el fin de minimizar la necesidad de realizar operaciones algebraicas. A este respecto incluyo en el recuadro 11 un breve análisis de las razones por las cuales, desde mi perspectiva, el pensamiento matemático griego se orientó hacia la geometría.

Antes de abordar las demostraciones revisaré algunos preliminares; para ello, dedico el próximo capítulo, lo cual me facilitará la tarea.

**Recuadro 11.** La elección por la geometría en la Antigua Grecia

Las matemáticas desarrolladas por los pensadores de la Antigua Grecia (de las exploraciones pitagóricas a los logros de Arquímedes, pasando por la sistematización debida a Euclides) cultivaron la perspectiva geométrica. Las razones de esta elección se encuentran en las restricciones tecnológicas y culturales de la época. La palabra *geometría*, en griego antiguo γεωμετρία, tiene como raíces etimológicas, escribiéndolas en el alfabeto latino, *geo* y *metron*, esto es, *tierra* y *medición*, respectivamente. Esto nos indica el origen de la geometría en la práctica de la medición de objetos mediante instrumentos simples, tales como la cuerda marcada y el compás, práctica desarrollada en tiempos previos tanto en Mesopotamia, como en Babilonia y en el Antiguo Egipto (generalmente en el contexto de la agrimensura y de la arquitectura). La particularidad griega radica en emplear las herramientas materiales y conceptuales de la geometría para abordar la demostración de declaraciones matemáticas complejas, mediante el famoso método de regla y compás. Un conocimiento que distinguía a quien lo poseía y le otorgaba autoridad simbólica, como bien lo expresó Platón con su famosa inscripción en el frontispicio de la Academia: Ἀγεωμέτρητος μὴδεὶς εἰσὶτω (en español: “Aquí no entra nadie que no sepa geometría”). Las demostraciones matemáticas griegas son en principio álgebra abstracta realizada mediante operaciones geométricas. Sus métodos de notación y las limitaciones tecnológicas asociadas a dispositivos de cómputo, tales como el ábaco, no permitía a los griegos seguir una vertiente de desarrollo ajena a la geometría. Esto tendría lugar con el surgimiento del álgebra en el mundo islámico, como herramienta para la resolución de problemas prácticos, hacia el siglo IX de nuestra era, que abordaría la resolución de problemas de índole geométrica mediante técnicas algebraicas. El matemático persa musulmán Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī utilizaría conceptos derivados de los *Elementos* de Euclides para validar sus desarrollos en torno a la resolución sistemática de ecuaciones algebraicas.

## Conceptos preliminares

En este capítulo me detendré ante la puerta del territorio constituido por los teoremas elegidos y que han sido introducidos previamente. Esto con el fin de pasar revista al conjunto de los conceptos básicos que a mi consideración son los mínimos requeridos para seguir la formulación concreta de los teoremas que abordaré posteriormente, así como para lo que corresponde a su demostración. En primera instancia recordaré lo que se entiende por *matemáticas* y por *conocimiento matemático*, para posteriormente exponer lo que respecta a las particularidades del *razonamiento matemático*, así como los diferentes *métodos deductivos de demostración* de declaraciones matemáticas. Evitaré en lo posible la exhaustividad, presentando sólo los métodos que se utilizan en la demostración de los teoremas elegidos. Tales métodos son las reglas del juego que he mencionado precedentemente. Finalizaré este capítulo recordando las definiciones de las familias de números que participan en las declaraciones matemáticas que conciernen a este volumen, e incluiré algunos conceptos básicos de geometría que serán de suma utilidad a todo lo largo de la exposición. Esta es, pues, la pauta que sigue mi exposición en este capítulo. Pasemos entonces a tratar el primer tema que nos concierne.

### MATEMÁTICAS Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

En el mundo de las matemáticas todo comienza con *definiciones*, las cuales sólo tienen razón de ser si son útiles. Espero que ese sea el caso para lo que me concierne en este volumen. En lo que sigue se comprenderá el concepto de definición como

*Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial.*

He aquí entonces la primera definición que incluyo y que me será útil a todo lo largo de este volumen:

**DEFINICIÓN 1 (Matemáticas).** *Conjunto de conocimientos abstractos que resultan de razonamientos lógicos aplicados a diversas clases de objetos, así como las relaciones y operaciones matemáticas que existen entre dichos objetos.*

Aunque previamente he afirmado que no existe una definición universalmente aceptada de lo que se entiende por matemáticas, en lo que sigue utilizaré la que vengo de formular. Procedo así porque es útil para mis fines. Como lo he afirmado antes: la validez de todo concepto radica en su utilidad.

Conviene listar ahora de manera sucinta algunas de las clases de objetos matemáticos más comunes:

- conjuntos,
- números,
- operaciones,
- figuras geométricas,
- axiomas
- teoremas,
- demostraciones de teoremas.

En la práctica, las matemáticas, entendidas como ciencia, se organizan en diversas ramas, que pueden ser interpretadas como compartimentos bien delimitados de conocimiento matemático. Entre las ramas matemáticas se tienen:

- el análisis,
- el cálculo,
- la teoría del control automático,
- la teoría de conjuntos,
- la geometría,

- la teoría de los sistemas dinámicos,
- el álgebra,
- la combinatoria.

Cada una de las diversas ramas del conocimiento que constituyen a las matemáticas posee sus propios objetos matemáticos, su propia manera de tratar con ellos, así como sus propios especialistas. Procede puntualizar que existen entrecruzamientos entre distintas ramas; por ejemplo, la geometría algebraica combina el álgebra abstracta con la geometría analítica. Dentro de la comunidad matemática se han presentado esfuerzos importantes para evitar la fragmentación del conocimiento matemático, tales como el llevado a cabo por el grupo francés de matemáticas Nicolas Bourbaki en el siglo pasado. Dicho grupo, una suerte de clan formado por matemáticos superdotados, se centró en el empleo de la noción de *estructura*. En el recuadro 12 abordo brevemente los pormenores de dicho esfuerzo.

Aunque la noción de estructura propuesta por el grupo Nicolas Bourbaki permeó toda la ciencia matemática, influyendo incluso en la perspectiva estructuralista en las ciencias sociales y con ello encauzando su desarrollo a todo lo largo del siglo xx, lo cual no evitó la consolidación de su fragmentación en ramas. Hoy en día el nivel de especialización de la ciencia matemática es tal que cada rama posee a su vez subramas cada vez más especializadas. Esto significa que, a diferencia de lo que acontecía en siglos pasados, no existen en nuestro tiempo matemáticos universalistas; esto es, matemáticos que manejen al mismo nivel todas las áreas de las matemáticas de su tiempo. Este fenómeno no es exclusivo de las matemáticas, ya que es una característica de la ciencia contemporánea. Esta se caracteriza por la emergencia y consolidación de disciplinas con niveles extremos de especialización. Se suele afirmar que el último matemático universalista fue el también filósofo de las matemáticas Henri Poincaré, activo desde Francia en la segunda mitad del siglo xix y hasta la primera década del siglo xx, quien además de incursionar con éxito en todos los campos de las matemáticas de su era fue también un ingeniero renombrado.

**Recuadro 12.** Nicolas Bourbaki

El grupo de matemáticos francófonos *Nicolas Bourbaki*, organizado como sociedad secreta (siendo una de sus reglas el que sus integrantes se retiraran del grupo al cumplir los 50 años), se abocó en los años treinta del siglo pasado a la construcción de una presentación coherente del conocimiento matemático. Para esto se sirvió de la noción de *estructura* con la finalidad de eliminar la noción de compartimiento, que subyace a la fragmentación de las teorías matemáticas en ramas. La propuesta usó la teoría de conjuntos para proponer la noción de estructura, comprendida como un conjunto enriquecido con algunas propiedades adicionales. El conjunto de los números enteros  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , junto con la operación de suma binaria, constituye un elemento de la familia de las estructuras denominadas *grupos*, para ejemplificar el concepto. El planteamiento de Nicolas Bourbaki consistió en detectar las estructuras que constituyen el núcleo central de cada área de las matemáticas delimitando los puentes que las conectarán. El grupo Nicolas Bourbaki, acuartelado en la Escuela Normal Superior de París, alcanzó temporalmente la hegemonía en el dominio de la edificación de los modos del quehacer de la enseñanza y la investigación científica matemática hacia los años sesenta del siglo pasado. Cinco de sus miembros recibieron la Medalla Fields: Laurent Schwartz (1950), Jean-Pierre Serre (1954), Alexandre Grothendieck (1966), Alain Connes (1982) y Jean-Christophe Yoccoz (1994). El esfuerzo de unificación del conocimiento matemático por parte del grupo Nicolas Bourbaki se encuentra resumido en su tratado matemático (inacabado) *Éléments de mathématique* (en español: *Elementos de matemática*), compuesto por once libros, cuyos primeros tomos comenzaron a publicarse en 1939 por la editorial francesa Hermann (cuya relación con el grupo terminó en un conflicto por la propiedad de los derechos de autor), los cuales han sido publicados hoy en día en inglés por la editorial alemana Springer. La singularización *matemática*, en lugar de *matemáticas*, manifiesta la voluntad del grupo de presentar a la ciencia matemática como un campo unificado.

Con respecto a la definición precedente, tomada como punto de partida, se le puede asociar la noción de *conocimiento matemático*:

DEFINICIÓN 2 (Conocimiento matemático). *Información organizada sobre un determinado tema o asunto construido matemáticamente.*

Esta definición implica obviamente que no todo conocimiento es matemático, pues para serlo requiere ser construido de un modo muy especial. ¿Cómo se construye entonces el conocimiento matemático y qué lo distingue de otras clases de conocimiento? Esto tiene lugar mediante el ejercicio sistemático de una clase muy particular de razonamiento, al que se conoce como *razonamiento hipotético-deductivo*, el cual abordo en la sección siguiente.

## EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Me permito comenzar esta sección con un par de definiciones relacionadas con los métodos mediante los cuales se construye el conocimiento matemático.

DEFINICIÓN 3 (Razonamiento inductivo). *Método de razonamiento basado en hacer inferencias y conclusiones a partir de observaciones.*

Se suele decir también que el razonamiento inductivo es el proceso que consiste en inferir una regla general que explica una observación a partir de instancias específicas. Esta clase de razonamiento es importante en el ámbito de la ciencia, aunque secundario con respecto a la clase de conocimiento que defino a continuación:

DEFINICIÓN 4 (Razonamiento hipotético-deductivo). *Método de razonamiento con el cual una conclusión es alcanzada mediante argumentos lógicos con base en una colección dada de suposiciones; esto es, premisas aceptadas a priori.*

En la historia del conocimiento matemático el razonamiento inductivo se utilizó con frecuencia en la etapa inicial. Esto debido a que mucho de lo que se hacía originalmente en matemáticas se basaba en observaciones de fenómenos físicos o bien partía de necesidades materiales muy

concretas; el pago de impuestos en Mesopotamia, dependiendo de la superficie cultivada, por ejemplo. Hoy en día el razonamiento inductivo se sigue utilizando en las matemáticas, *aunque nunca para llegar a conclusiones formales*, esto es, que no admiten duda alguna. Esto me lleva a presentar la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 5 (Conjetura).** *Cualquier afirmación matemática que no ha sido probada todavía.*

Un número importante de resultados matemáticos son formulados primero como conjeturas, con base en razonamientos inductivos. La gestación de una conjetura suele implicar la generalización de resultados matemáticos particulares, y frecuentemente está asociada con dificultades importantes en la construcción de una demostración que la valide. Esto es, en matemáticas las conjeturas son enunciadas ante la carencia de demostraciones. Las conjeturas pueden o no ser ciertas y esto solamente puede ser establecido vía una demostración, que en caso de ser válida hace de la conjetura en cuestión un teorema.

Este es, por ejemplo, el caso con el denominado último teorema de Fermat,<sup>10</sup> formulado por Pierre de Fermat en 1670, sin proporcionar una demostración, por lo cual la formulación original correspondió a una conjetura. La demostración de esa famosa declaración fue legitimada al ser publicada por el matemático inglés Andrew Wiles en 1995 en la revista matemática *Annals of Mathematics* de la Universidad de Princeton, Estados Unidos, no sin antes haber pasado por una larga y dolorosa etapa de validación.

Hago hincapié en que hoy en día *un resultado matemático es aceptado únicamente cuando se obtiene como consecuencia de razonamiento deductivo*.

El razonamiento deductivo, como medio para alcanzar la certeza de una conjetura enunciada, nació en la Antigua Grecia, y se estima que fue Tales de Mileto el primero en servirse de él, tal y como lo expongo de manera breve en el recuadro 13.

<sup>10</sup> No existen tres números enteros positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , que satisfagan la ecuación  $a^n + b^n = c^n$ , para cualquier entero  $n$  mayor que 2. Note que si  $n = 2$  la tríada  $a = 3$ ,  $b = 4$  y  $c = 5$  satisface  $a^2 + b^2 = c^2$ ; en efecto,  $3^2 + 4^2 = 3 \times 3 + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ .

**Recuadro 13.** Tales de Mileto, el pionero

En cuanto al razonamiento hipotético-deductivo, los historiadores contemporáneos de las matemáticas suelen considerar que Tales de Mileto, en la Antigua Grecia, fue quien, alrededor del año 600 antes de nuestra era, proporcionó la primera prueba que hacía uso de razonamientos lógicos de índole deductiva para justificar un resultado matemático, esto es, para caracterizar su valor formal de verdad. Algunos historiadores dedicados a esta temática consideran que la invención del razonamiento hipotético-deductivo, en el contexto de la demostración de declaraciones matemáticas, sería la consecuencia de la búsqueda por parte de Tales de la validez absoluta de fórmulas geométricas que habría recolectado durante su estancia en el Antiguo Egipto y que se utilizaban allí para resolver problemas particulares, sin estar por ello asociados a la generalización. En este proceso Tales habría inventado no sólo el razonamiento hipotético-deductivo, sino la filosofía misma. Actualmente se estima que Tales no sólo fue el primer matemático, en el sentido moderno que se le da en Occidente, sino que también fue el primer pensador occidental en incursionar en la filosofía científica al romper definitivamente con explicaciones míticas a fenómenos naturales. Con Tales comienza entonces el proceso de sustitución de creencias por razonamientos formales. Así pues, puede decirse que Tales es el pionero en Occidente de los modos de razonar que ahora reconocemos como científicos.

No todo el conocimiento matemático es el resultado de demostraciones obtenidas mediante razonamientos deductivos. Este es el caso de los axiomas:

**DEFINICIÓN 6 (Axioma).** *Postulado matemático que se toma como evidentemente verdadero sin necesidad de prueba.*

A los axiomas se les unen las definiciones matemáticas para dar forma a un *sistema matemático axiomático*:

DEFINICIÓN 7 (Definición matemática). *Declaración precisa que es utilizada para dar condiciones explícitas para el término matemático definido.*

¿Qué es entonces un sistema matemático axiomático?

DEFINICIÓN 8 (Sistema matemático axiomático). *Es conocimiento matemático organizado que se construye con base en un conjunto de axiomas, los cuales se utilizan, mediante razonamiento deductivo, para demostrar teoremas.*

Esto lleva necesariamente a la pregunta: ¿qué es lo que se entiende por prueba en matemáticas? Esta es la respuesta:

DEFINICIÓN 9 (Prueba matemática). *Secuencia de argumentos matemáticos rigurosos que son presentados de manera clara y concisa y que de manera convincente demuestran la validez del enunciado matemático provisto.*

Puedo ahora introducir la definición siguiente:

DEFINICIÓN 10 (Teorema). *Es cualquier declaración matemática cuya validez se puede demostrar aceptando argumentos lógicos y matemáticos.*

Se puede afirmar entonces que todo teorema matemático es la cara pública de un conjunto de razonamientos lógicos deductivos armados en torno a axiomas específicos. En el recuadro 14 expongo un poco más de esta relación entre teoremas y razonamiento deductivo.

Asociada con la definición precedente se tiene la siguiente:

DEFINICIÓN 11 (Lema). *Declaración auxiliar utilizada en la demostración de otra declaración.*

Una vez demostrado un teorema, existen declaraciones que son consecuencia directa y que por ello no requieren demostración propia. A tales declaraciones se las denomina corolarios.

DEFINICIÓN 12 (Corolario). *Declaración cuya validez se sigue de una declaración ya demostrada.*

Se puede abordar ahora lo que concierne a los métodos específicos que se utilizan para llevar a cabo la demostración de las declaraciones matemáticas y que sistematizan el uso del razonamiento deductivo.

**Recuadro 14.** Teoremas y razonamiento hipotético-deductivo

En matemáticas todo teorema –en tanto que enunciado formulado dentro de un sistema formal dotado de semántica formal– se demuestra mediante el empleo del razonamiento hipotético-deductivo. Se parte para ello de premisas cuya verdad formal ha sido establecida previamente; esto es, axiomas y teoremas ya demostrados. La noción misma de teorema exige esta conexión entre lo que se declara como cierto y la manera como esto se demuestra y se somete al rigor del juicio de la verificación lógica. En la organización del conocimiento matemático se sigue la lógica de etiquetar de manera jerárquica las declaraciones demostradas conforme a su nivel de importancia. Las declaraciones matemáticas más importantes son los teoremas. Muchas veces las demostraciones de teoremas son largas, por lo que se organizan sirviéndose de resultados parciales. Estos no son otra cosa que teoremas, aunque para etiquetar su papel como resultados auxiliares se suelen denominar como lemas o como proposiciones, de acuerdo con su utilidad.

## MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN DE LAS DECLARACIONES MATEMÁTICAS

La demostración de una declaración matemática mediante la aplicación sistemática del razonamiento hipotético-deductivo puede tener lugar de diversas maneras, que dependen, por supuesto, de la naturaleza específica de la declaración. Además, para una declaración matemática dada no existe, en general, una sola demostración y todas las que permiten concluir la veracidad de la declaración en cuestión, si tal es el caso, son estrictamente equivalentes. De manera metafórica, puede decirse que una declaración matemática cierta afirma dónde se encuentra un objeto en el universo de los objetos matemáticos (esto es, aquellos que son verdaderos en el sentido formal previamente discutido); y el proceso demostrativo elegido indica en consecuencia cómo llegar a la ubicación exacta a partir de un punto de partida caracterizado de manera precisa. Esto es,

las premisas también condicionan lo que es y lo que no es un camino válido. El arte de construir la demostración de una declaración matemática dada consiste entonces en hallar el camino más corto y autoevidente posible. Todo un reto. En tal sentido, la demostración de toda declaración matemática está asociada a la elección de un método demostrativo, lo cual dependerá básicamente del bagaje matemático de quien lo elige y de su creatividad. El proceso de construcción de una demostración específica es ante todo un proceso altamente creativo. Es en esencia un juego delimitado por restricciones, esto es, reglas precisas que no admiten excepciones en su aplicación. Los tipos de demostración más comunes de los que se sirve la ciencia matemática son los siguientes:

- demostración por contradicción,
- demostración por inducción,
- demostración sin palabras,
- demostración por contraejemplos,
- demostración constructiva.

El dominio de estos cinco métodos de demostración de declaraciones matemáticas constituye el recurso intelectual fundamental con el que cuentan los matemáticos profesionales. En lo que sigue detallo brevemente en qué consiste cada uno de estos métodos.

**DEMOSTRACIÓN POR CONTRADICCIÓN:** Dada la declaración matemática que se quiere demostrar, se supone como punto de partida que la declaración es falsa. Entonces, por medio del uso del razonamiento hipotético-deductivo se contempla llegar a la conclusión de que una cierta declaración, que se ha supuesto que es falsa, resulte verdadera de acuerdo con el razonamiento seguido. Debido a la contradicción resultante, se concluye que la aseveración de que es falsa la declaración que se quiere demostrar no se sostiene, esto es, se genera una contradicción lógica. Este método demostrativo suele ser el preferido por la mayoría de los matemáticos.

**DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN:** Este método se utiliza en declaraciones que conciernen a todos los números enteros naturales. Se divide en dos casos.

*Caso base:* Se supone que la declaración es válida para el entero  $n = 1$ .

*Caso inductivo:* Se demuestra que si la declaración es válida para el caso  $n = k$ , entonces también lo es para el caso  $n = k + 1$ .

La consideración de la validez de los dos casos, establecida en secuencia, demuestra que la declaración es válida para *todos* los enteros naturales.

**DEMOSTRACIÓN SIN PALABRAS:** Se trata de la técnica consistente en utilizar un diagrama, sin texto auxiliar, cuya observación demuestra que la declaración matemática concernida, formulada en términos visuales, es autoevidente. También se denomina *demonstración visual* a la que sigue este método demostrativo.

**DEMOSTRACIÓN POR CONTRAEJEMPLOS:** Esta técnica consiste en hallar un ejemplo para el cual la declaración matemática falla. Usualmente el hallazgo del contraejemplo permite refinar el proceso de formulación de la declaración matemática en cuestión.

**DEMOSTRACIÓN CONSTRUCTIVA:** Técnica consistente en proveer un procedimiento para construir el objeto matemático concernido por la declaración matemática que se busca demostrar. Este método suele ser muy común en el ámbito de las matemáticas aplicadas, esto es, la *aplicación* es justamente lo que se construye.

Dada una declaración matemática, la elección del método de demostración no sólo depende de la naturaleza de ésta, ya que también depende del gusto y de las habilidades del matemático que construye la demostración. Por ello, una misma declaración puede tener más de un método de demostración (como lo he afirmado precedentemente), cada uno de ellos potencialmente de naturaleza distinta. Esto significa que, en general, se puede llegar a un mismo destino (el resultado enunciado por la declaración matemática) siguiendo caminos diferentes, siempre y cuando cada uno de ellos se sostenga en términos lógico-deductivos. Los matemáticos suelen buscar demostraciones que sean fáciles de comprender por otros matemáticos, su público natural, y la *elegancia* es uno de los criterios que

se utilizan para avalar una demostración. En el recuadro 15 abordo este aspecto del pensamiento matemático.

En lo que sigue presento los objetos matemáticos que serán de utilidad al abordar las demostraciones que conciernen a este volumen.

## NÚMEROS

En matemáticas un número es una abstracción que se utiliza para representar una magnitud o una cantidad, aunque para muchos matemáticos los números son entidades *reales* que se representan a sí mismas. Los números se suelen representar por medio de símbolos, a los que se denomina *numerales*. En Occidente los numerales más comunes hoy en día son los numerales arábigos:<sup>11</sup>

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Existen diversas clases de números. Las que conciernen a este volumen son las siguientes:

**NÚMEROS ENTEROS NATURALES:** Es el conjunto constituido por los números que se utilizan para contar y ordenar los elementos de conjuntos y se suele representar por medio de la letra mayúscula  $\mathbb{N}$ ; es decir:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

**NÚMEROS ENTEROS:** Es el conjunto que se constituye al agregar, al conjunto de los números naturales, los negativos de éstos y el número al que se denomina como cero. Este conjunto se representa mediante la letra mayúscula  $\mathbb{Z}$ ; a saber:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

<sup>11</sup> Estos numerales fueron formulados por matemáticos islámicos en el siglo VIII de nuestra era con base en el sistema posicional decimal indio, concebido entre los siglos I y III de nuestra era. Se considera que tal sistema fue transmitido por un astrónomo indio de visita en Bagdad en tiempos del califato abasí de al-Mansur (712-775), y que se difundió en Occidente a través de la cultura árabe de Al-Andalus, esto es, la península ibérica. Aunque vetado en Europa por la Iglesia católica durante siglos, terminó por imponerse y su trazado se normaliza hacia el siglo XV.

**Recuadro 15.** La elegancia matemática

En el entorno profesional de las matemáticas se suele afirmar que la demostración de una declaración matemática es elegante si ésta es a la vez simple y también *bella*. En cuanto a la simplicidad, esto implica que la demostración es fácil de seguir sin el requerimiento de un bagaje técnico sofisticado. Evidentemente una demostración puede ser simple para alguien y muy complicada para otra persona, *incluso cuando ambas posean el mismo bagaje técnico*. El asunto de la belleza de la demostración es mucho más complejo, como siempre que se aborda algo que concierne mecanismos cognitivos de apreciación. Se afirma que algo es bello si quien lo aprecia goza de placer estético al hacerlo. Esto obviamente implica subjetividad, ya que lo que es placentero para una determinada persona no necesariamente lo es para otra. Ahora bien, el placer estético es básicamente una *emoción* suscitada por un objeto, en este caso una demostración de una declaración matemática. Dado que toda emoción implica, en el caso de los seres humanos, la participación de un comportamiento fisiológico, ciertos comportamientos expresivos y la *conciencia*, el placer estético asociado a una demostración matemática se asocia por necesidad con la *decisión* de gozarla por parte de quien la aprecia. Es obvio que la decisión es más fácil de ser tomada si se comprende a profundidad lo que se está demostrando, lo cual significa que la elegancia de una demostración matemática es esencialmente subjetiva. Esto es motivo de debate, ya que algunos matemáticos todavía creen en la belleza objetiva del hecho matemático y afirman desde tal creencia que el placer estético es lo que los guía en la construcción del conocimiento matemático. En mi caso, me reconozco en la perspectiva sociológica cultivada por Pierre Bourdieu, para sostener que la calificación de un razonamiento como elegante pone de manifiesto mecanismos subyacentes de disputa por la hegemonía social de los matemáticos en el interior de su campo social. En concordancia con esta posición, me permito afirmar que la sensibilidad proclamada por el matemático es básicamente un reclamo *elegante* de privilegios.

Con respecto a la notación utilizada para representar los conjuntos básicos de números ( $\mathbb{N}$  para los números naturales, por ejemplo), se acostumbra denominar *negritas de pizarra* a los caracteres tipográficos usados, y se suele afirmar que surgieron al tratar de escribir letras mayúsculas en negritas con gis sobre la pizarra negra que solía utilizarse hace algunas décadas en los salones de clase, y que todavía suelen emplear algunos matemáticos tradicionalistas.

Cabe mencionar que, dado un número entero, su negativo es aquel número entero tal que al realizarse la suma de ambos el resultado es exactamente igual a cero. Se dice que el conjunto  $\mathbb{Z}$  es cerrado bajo la suma, lo cual significa que la suma de cualesquiera dos números de este conjunto da como resultado un número que se encuentra en el conjunto. Esta es una de las propiedades que hacen del conjunto de los números enteros —junto con la operación de suma, que asocia a cualquier par de sus elementos con un tercer elemento que también está incluido en el conjunto— un *grupo*, una de las estructuras algebraicas más simples. Esta estructura algebraica se suele representar mediante la notación  $(\mathbb{Z}, +)$ .

En lo que sigue se denota mediante  $\mathbb{Z}_+$  al conjunto de los números enteros positivos; es decir:

$$\mathbb{Z}_+ := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

De la misma manera  $\mathbb{Z}_-$  denota al conjunto de los números enteros negativos, esto es:

$$\mathbb{Z}_- := \{\dots, -4, -3, -2, -1\}.$$

En consecuencia, el número 0 es un entero, aunque no es ni positivo ni negativo. Esto significa que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\},$$

donde el símbolo  $\cup$  representa la unión de conjuntos *sin elementos repetidos* (cuando se repiten elementos se utiliza el símbolo  $\dot{\cup}$ ), y  $\{0\}$  denota al conjunto que tiene como único elemento al número cero.

**NÚMEROS PRIMOS:** Los números primos son los números naturales mayores que uno que no son iguales al producto de números naturales más pequeños, exceptuando al número 1.

EJEMPLO 1. El número 3 es primo, pero el número 4 no lo es. En efecto, 3 se puede escribir como

$$3 = 1 \times 3,$$

esto es, sólo tiene al 1 como factor. Sin embargo,

$$4 = 1 \times 2 \times 2,$$

por lo que no es un número primo. ■

Cabe mencionar que ha sido demostrado que todo número entero se puede descomponer como el producto de números primos. La demostración de esto concierne a uno de los teoremas presentados en este volumen. El siguiente ejemplo ilustra la descomposición de un número entero en factores primos.

EJEMPLO 2. El número 36 se puede descomponer como

$$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3,$$

lo cual también se puede formular diciendo que 36 posee como factores primos a  $\{2, 2, 3, 3\}$ , esto es, a los números primos 2 y 3, ambos con multiplicidad igual a 2, ya que

$$2^2 \times 3^2 = 36,$$

donde  $2^2$  se utiliza para representar el producto de multiplicar el número 2 por sí mismo, esto es,  $2^2 := 2 \times 2$  (el símbolo  $:=$  significa 'está definido como'). ■

Se dice que todo número natural que no es primo es un *número compuesto*. Esto excluye al número 1.

**NÚMEROS RACIONALES:** Es el conjunto de los números que se pueden representar como el cociente (o fracción) de dos números enteros  $p/q$ : un numerador  $p$  y un denominador diferente de cero  $q$ . Este conjunto se suele representar como  $\mathbb{Q}$ . Advierta que

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q},$$

lo cual significa que *todo número entero es también un número racional*; es decir,  $\mathbb{Z}$  es un subconjunto del conjunto  $\mathbb{Q}$ . Lo contrario no es en general cierto.

EJEMPLO 3. Los números  $1$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $-5$  y  $\frac{-4}{3}$  son números racionales. Note que

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$$

y

$$-5 = \frac{-5}{1} = \frac{5}{-1}.$$

■

El lector recordará que

- la división de un número negativo por un número positivo da un número negativo;
- la división de un número positivo por un número negativo da un número negativo;
- la división de un número positivo por un número positivo da un número positivo;
- la división de un número negativo por un número negativo da un número positivo.

Todo esto es cierto al reemplazar la división por el producto, exceptuando a los productos que tienen como multiplicador o como multiplicando al cero (en tal caso el producto es igual a cero).

Note que el número  $0$  es también un número racional, ya que se le puede escribir como una fracción; a saber:

$$0 = \frac{0}{p},$$

donde  $p$  es cualquier número entero diferente de cero.

**NÚMEROS IRRACIONALES:** Es el conjunto de los números que no se pueden representar como el cociente (o fracción) de dos números enteros  $p/q$ : un numerador  $p$  y un denominador diferente de cero  $q$ . A este conjunto se le suele representar como  $\mathbb{I}$ .

**NÚMEROS REALES:** Es el conjunto, denotado con  $\mathbb{R}$ , que resulta de unir el conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

expresión en la cual el símbolo  $\cup$  se utiliza para representar la unión de conjuntos (sin repetición de elementos).

Además de los conjuntos de números que acabamos de presentar, en algunas de las demostraciones se tendrá la necesidad de utilizar otra clase de entidades matemáticas: los *objetos geométricos*. De los números nos servimos para abstraer el concepto de cantidad. En cuanto a los objetos geométricos, de estos nos servimos para abstraer la noción de *dimensión* asociado a la percepción del *espacio físico*.

A continuación paso revista a los objetos geométricos que serán útiles a lo largo de este libro.

## ALGUNOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

En matemáticas, la geometría concierne al estudio de las propiedades de figuras y del espacio en el que éstas se encuentran. Ambos expresados en términos abstractos, esto es, como representaciones mentales. Por ello se suele decir que la geometría abstrae las propiedades del espacio físico en que estamos inmersos, las cuales se proyectan desde la percepción en los procesos cognitivos que en nuestro cerebro les son específicos. Se han realizado estudios que evidencian el papel que desempeñan en el cerebro de algunos animales, entre ellos los humanos, las así llamadas *células de red* —una clase de neuronas— en la determinación de la comprensión de la ubicación en el espacio. Esto significa que el proceso evolutivo nos ha dotado con la capacidad de construir representaciones cognitivas de índole geométrica asociadas a nuestra relación con el espacio físico (entre otras cosas, para permitir nuestra navegación correcta en él). La estructura misma del sistema nervioso central coadyuva a la aprehensión de lo geométrico. Por eso, muchos de los conceptos de la geometría nos son, hasta cierto punto, evidentes. Tenemos un cerebro apto y estructurado para producir conocimiento de índole geométrica y, por lo tanto, para el pensamiento de índole matemática.

Algunas de las demostraciones que se exponen en este volumen requieren comprender ciertos conceptos geométricos simples, restringidos a la perspectiva cultivada por Euclides en los *Elementos*, que caracteriza a

la así denominada *geometría euclidiana*. Estos son los siete conceptos geométricos que serán utilizados a lo largo de mi exposición:

- punto,
- línea,
- línea recta,
- plano,
- ángulo,
- polígono,
- poliedro.

En lo que sigue los describo brevemente.

**PUNTO:** Elemento constitutivo más pequeño del espacio geométrico, es decir, un lugar en el que no se puede distinguir otro lugar que no sea él mismo.

**LÍNEA:** Objeto geométrico formado por una sucesión continua de puntos.

**LÍNEA RECTA:** Objeto geométrico formado por una sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección.

**PLANO:** Colección de puntos que se caracteriza por la propiedad de que al tomar cualesquiera dos puntos que le pertenecen y unirlos mediante una línea recta, ésta no contendrá ningún punto fuera de la colección.

**ÁNGULO:** Forma geométrica constituida por dos líneas que divergen de un punto común, al que se denomina vértice. El tamaño de un ángulo se mide usualmente en *radianes*. Un radian es la cantidad que tiene que abrirse un ángulo de manera que la longitud de la sección de la circunferencia del círculo que captura sea igual a la longitud del radio de éste. También se pueden cuantificar ángulos mediante grados, teniendo un círculo completo 360 grados. Para indicar que se está hablando de grados se le agrega un pequeño círculo a la cantidad. Así,

$360^\circ$  indica que se está hablando del ángulo que cubre toda la circunferencia del círculo, mientras que  $90^\circ$  indica que el ángulo cubre un cuarto de tal circunferencia (esto se denomina *ángulo recto*).

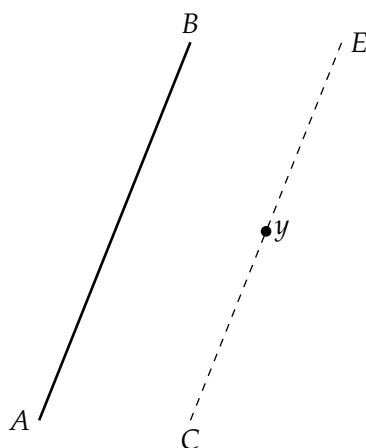
**POLÍGONO:** Figura geométrica plana formada por una línea discontinua constituida por segmentos de línea recta conectados, denominada línea poligonal, que forma una cadena poligonal cerrada. Cada segmento constitutivo de esta es denominado lado del polígono. En el caso en que todos los lados tienen la misma longitud y además la línea poligonal es equiangular (esto es, todos los ángulos de vértice son iguales), se dice que el polígono correspondiente es regular (el cuadrado es el ejemplo más conocido de la clase de los polígonos regulares; cada uno de sus ángulos mide  $90^\circ$ ).

**POLIEDRO:** Forma geométrica tridimensional que tiene caras planas poligonales que se encuentran en segmentos de línea, denominados bordes. Se dice que un poliedro es regular si todas su caras consisten en polígonos regulares.

Los objetos geométricos que vienen de ser listados son en verdad muy simples, aunque esto no minimiza su importancia matemática. Además, debido a que en este volumen se toma como válido el marco conceptual desarrollado por Euclides en los *Elementos*, será de particular importancia que se sostenga el postulado de las paralelas, también llamado *quinto postulado de Euclides*, el cual se ilustra en la figura 2 (*por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela*).

Más tarde regresaré al postulado de las paralelas, de suma importancia en el ámbito de las matemáticas.

Hasta aquí con los preliminares. Una vez preparado el andamiaje del edificio conceptual que concierne a este volumen, ha llegado el momento de iniciar su construcción, para lo cual abordo en el siguiente capítulo el primero de los teoremas que serán revisados.



**Figura 2.** Postulado de las paralelas

La figura muestra de manera gráfica el *postulado de las paralelas*, también conocido como *quinto postulado de Euclides*. Este afirma que dada una línea recta, en este caso denotada como  $\overline{AB}$ , y un punto exterior a ella, denotado aquí como  $P$ , sólo se puede trazar por él una sola recta que le es paralela, a la que se le denota en esta figura como  $\overline{CE}$ .

# Teorema 1. La suma de los primeros $n$ números enteros naturales es igual a la mitad del producto de $n$ por $n + 1$

Decidí comenzar la lista de teoremas que demostraré a lo largo de este libro con una declaración matemática sencilla y que al mismo tiempo me permitiera incluir algunos comentarios que juzgo pertinentes con respecto a la interacción que se da entre el conocimiento matemático y la cultura. Estos comentarios comprenden los siguientes temas:

- El mito en torno a las matemáticas y el así denominado *sentido de los números*.
- El peso de la tradición en la manera de escribir lo matemático.
- La popularidad inesperada de las anécdotas que involucran a las matemáticas en la cultura de masas.

La declaración matemática que elegí es muy conocida por los matemáticos y tiene cierta popularidad entre quienes gustan de ellas. Es un resultado clásico, y hasta hace no muchos años se solía utilizar, desafortunadamente, en numerosos cursos de matemáticas elementales de los niveles escolares básico y medio. ¿Por qué desafortunadamente? Porque en general su uso en el aula educativa no se proponía desarrollar la habilidad de los alumnos en aspectos de razonamiento matemático. Nada más lejano de la intención de los maestros. Básicamente se utilizaba para ocupar durante un muy laaaaaargo tiempo a los alumnos, mientras el maestro se dedicaba a descansar de su “ardua labor” de enseñanza. Dicho

esto con un ligero sarcasmo, que espero me perdone el lector. Sin duda tal forma de ocupar a los alumnos con ejercicios tediosos ha sido una de las pésimas prácticas de la enseñanza de las matemáticas, que a lo largo de los siglos han contribuido a atemorizar a muchos alumnos y a alejarlos así del placer de disfrutarlas. Además, muchas veces bastaba con que el alumno cometiera un error en el cálculo solicitado para que se le calificara como poco apto para el razonamiento matemático y le daba así al maestro la posibilidad de ejercitar su supuesta superioridad intelectual humillándolo en público. Desgraciadamente, siguen existiendo hoy en día maestros de matemáticas que sufren su labor de enseñanza, más que gozarla. Maestros sin vocación para los cuales los procesos mentales de sus alumnos siguen siendo un gran misterio. En consecuencia, siguen torturándolos con horas y horas de cálculos aritméticos inútiles. Esta es precisamente la clase de actividades que dejan en los alumnos la idea errónea de que las matemáticas son algo que no sirve para nada útil y que tiene que ver con la mecanización de operaciones aritméticas irrelevantes. Afortunadamente, es de esperarse que los avances de las ciencias cognitivas, así como las mejoras en las metodologías de enseñanza de las matemáticas, fortaleciendo su orientación lúdica, permitan encauzar de manera virtuosa los procesos educativos en beneficio no sólo de los alumnos, sino también de los maestros y de las matemáticas mismas, evitando así los traumas que siguen presentes en el sistema educativo cuando de enseñarlas se trata.

Cabe mencionar que, asociada con el cómputo repetitivo de operaciones aritméticas como parte del proceso educativo básico, se ha llegado a instalar una concepción social equivocada que confunde la habilidad de realizar operaciones aritméticas con la capacidad de abordar el fenómeno matemático. Este error es frecuente y se mantiene incluso en la mente de un porcentaje importante de adultos, incluso en aquellos con formación universitaria, que confunden la posesión del denominado *sentido de los números* con la posesión de habilidades avanzadas de cognición matemática. Aunque importante, el sentido de los números no es sinónimo de razonamiento matemático. En el recuadro 16 profundizó con respecto a este asunto.

**Recuadro 16.** Las matemáticas y el sentido de los números

Investigaciones científicas centradas en estudiar el proceso de desarrollo de las habilidades matemáticas en la infancia han concluido que éstas se basan inicialmente en lo que se denomina el *sentido de los números*; a saber: la representación analógica de los números, que permite básicamente abordar la comparación de cantidades. Esta representación cognitiva comprende dos sistemas básicos: por un lado, el sistema numérico aproximado, asociado a la percepción y el procesamiento aproximado de grandes cantidades; por el otro, el sistema digital preciso, el cual permite la recolección rápida y el procesamiento preciso de pequeñas cantidades. También se ha determinado que las habilidades numéricas en los niños mejoran con la edad, debido a la maduración cognitiva y a la ayuda de la instrucción escolar, hasta volverse eficientes en la edad adulta. En términos de la cognición matemática, además de la participación del sentido de los números, su desarrollo depende del grado de maduración de habilidades transversales, tales como la atención, la memoria de trabajo, el manejo del lenguaje, así como las representaciones espaciales. En virtud de que el sentido de los números tiene mucho de innato, se considera que en principio todas las personas son capaces de desarrollar habilidades matemáticas complejas. Sin embargo, es preciso no confundir el poseer un sentido de los números muy desarrollado con la posesión de dichas habilidades. Puede darse incluso la situación de poseerlas *sin contar con un sentido fuerte de los números*. Lo contrario también puede presentarse. Prueba de ello es la existencia de personas afectadas por lo que se denomina el *síndrome del sabio* (estudiado en el contexto de la comprensión del autismo), que pueden llegar a realizar con precisión y gran rapidez cálculos numéricos sin necesariamente poseer la capacidad de razonamiento hipotético-deductivo requerida para la demostración de declaraciones matemáticas. Existen evidencias empíricas de que el sentido de los números está presente en algunas especies de animales no humanos, con variaciones dependiendo de las especies. Los perros, por ejemplo, pueden realizar sumas simples.

Regreso ahora a la declaración matemática inicial, esperando no inducir (ni reactivar) con ello ningún trauma en el lector.

La declaración matemática que concierne a este capítulo afirma que la suma de todos los primeros  $n$  números pertenecientes a  $\mathbb{N}$ , esto es,  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , está dada por la fórmula siguiente:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

Note que la fórmula precedente, de ser cierta (que es justamente lo que se quiere demostrar), permite reducir el número de cálculos para llegar al resultado que se busca. En efecto, la operación que se encuentra en el lado izquierdo de la igualdad requiere realizar  $(n - 1)$  sumas parciales, mientras que la operación del lado derecho de la igualdad requiere únicamente 3 operaciones aritméticas, *cualquiera que sea el valor de  $n$*  (esto es, sumarle 1 a  $n$ , multiplicar el resultado de tal suma por  $n$  y lo que resulta dividirlo a la mitad). Hacer más fácil de realizar el cálculo es, pues, el objetivo obvio de la declaración.

Abriendo un paréntesis me permito puntualizar que en este caso la declaración matemática tiene una finalidad claramente utilitaria, lo cual no siempre es lo que se busca en matemáticas. De hecho, una cantidad importante de matemáticos que desean ser tratados como una suerte de aristócratas —es decir, los integrantes de más alto orden de la sociedad a la que pertenecen— manifiestan sin ambigüedad estar felices de que los resultados de su labor científica no sean aplicables para resolver ninguna necesidad social concreta. Esto es más común de lo que suele pensarse, aunque tales matemáticos se cuidan de que su posición sea del dominio público, puesto que es algo complicado decir que se está feliz de hacer algo *socialmente inútil* y al mismo tiempo exigir a la sociedad recursos para sostener tal esfuerzo. Lo cierto es que, en el mejor de los casos, los matemáticos que sostienen tal posición de manera sincera muestran una ingenuidad que sorprende. Esto porque la supuesta inutilidad social de su trabajo profesional coadyuva al sostenimiento de estructuras sociales que, a fin de cuentas, promueven privilegios de clase, ya que su actitud dificulta la promoción de los intereses gremiales de la comunidad de matemáticos. En el peor de los casos, el matemático profesional orgulloso

de la supuesta inutilidad de su quehacer es consciente plenamente de su papel como aliado de los sectores sociales dominantes, con los cuales se identifica al servirse de su maestría en el manejo de cierta clase de conocimiento para consolidar la hegemonía del sistema de dominación.

En defensa de la pureza matemática, se manifiesta de manera cruda la ideología defendida por Platón en su famoso diálogo la *República*, que sostuvo el derecho de los más aptos para detentar el poder político. De acuerdo con esa posición, la idoneidad para disfrutar de los privilegios del poder se mediría por la habilidad *individual* para embarcarse en proyectos puramente intelectuales, esto es, sin utilidad social concreta. Este fenómeno sociocultural no es exclusivo del ámbito de las matemáticas, ya que se presenta en general en prácticamente todos los ámbitos de la ciencia, incluso en las ciencias sociales. En el caso de las matemáticas esto ha llevado a dividir el conocimiento matemático entre *conocimiento puro* y *conocimiento aplicado*, lo cual suele asumir que lo *puro*, es decir, lo no contaminado por la necesidad práctica, es mejor por ello.

*En términos institucionales y sociológicos, es común que los científicos dedicados a desarrollar aplicaciones de la ciencia matemática sean considerados como de segunda clase con respecto a quienes se dedican a alguna rama de las matemáticas reconocidas como puras.*

Este es sin duda un logro social notable de los *matemáticos puros*. Esto se traduce en gran medida en la monopolización de un porcentaje muy importante de los recursos sociales invertidos en la ciencia matemática, en detrimento de la ciencia matemática misma. Cierro aquí este paréntesis y continúo con la preparación previa a la presentación de la demostración que concierne a este capítulo.

Ilustro ahora el uso de la declaración que atañe al presente capítulo con un ejemplo muy simple, que aborda el cómputo de la suma de un conjunto muy pequeño de números naturales.

**EJEMPLO 4.** *Considere la suma de los primeros 10 números enteros naturales, esto es, los elementos del conjunto dado por  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ; queremos, pues, realizar la suma siguiente:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

*Esta suma no es difícil de ser llevada a cabo. En efecto, expresada en términos de sumas parciales:*

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &= 3, \\
 1 + 2 + 3 &= 3 + 3 = 6, \\
 1 + 2 + 3 + 4 &= 6 + 4 = 10, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 10 + 5 = 15, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &= 15 + 6 = 21, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 &= 21 + 7 = 28, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 &= 28 + 8 = 36, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 36 + 9 = 45, \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 &= 45 + 10 = \underline{55}.
 \end{aligned}$$

*El valor de la suma es entonces igual al número entero 55. Utilizando ahora el teorema, el cual aún no ha sido demostrado, se llega al siguiente resultado:*

$$\frac{n \times (n + 1)}{2} = \frac{10 \times (10 + 1)}{2} = \frac{10 \times (11)}{2} = \frac{110}{2} = \underline{55}.$$

*Observe entonces que las dos cantidades obtenidas coinciden. Esto es precisamente lo que afirma la declaración matemática que se trata en este capítulo. Como puede verse la suma requirió en este caso realizar un total de 9 cálculos aritméticos simples, correspondientes cada uno de ellos a una suma. Hice la prueba sumando a mano, y anotando cada resultado parcial y me tardé un poco menos de 30 segundos en obtener el resultado. Al parecer me llevaría alrededor de 50 minutos computar la suma de los primeros 1000 números naturales. Seguramente me tardaría más. Visto esto uno comprende fácilmente la malévola tentación de algunos maestros de ocupar a sus alumnos en esta tarea.<sup>12</sup> La fórmula provista por la declaración matemática sólo necesita de un total de 3 operaciones aritméticas: una suma, una multiplicación y una división. Tal y como se ha afirmado precedentemente. ■*

<sup>12</sup> Tuve alguna vez un profesor en la universidad que llegó a dejarnos, en una clase de álgebra lineal, un cálculo matricial tedioso mientras él dormitaba oculto tras un diario que supuestamente leía, al parecer para bajarse la cruda después de una borrachera.

Tomando en cuenta lo que se presenta en el ejemplo anterior, podemos estar seguros de que la declaración matemática que se estudia en este capítulo es válida cuando  $n = 10$ . ¿Qué pasa para  $n = 11, 12, 13, \dots$ ?

Introduzco ahora un poco de notación especializada para expresar de manera compacta la declaración. En el recuadro 17 incluyo algunos comentarios sobre las tradiciones seguidas en Occidente con respecto a las notaciones y la tipografía utilizadas en textos matemáticos. Un tema por demás interesante.

Utilizando entonces la notación usual para la suma de una colección de números listados, los cuales se representan en términos simbólicos por medio de una letra indexada (tanto para distinguir cada número como para localizarlo en la colección). En este caso, el símbolo seleccionado corresponde a la letra minúscula  $x$ , indexada para significar su pertenencia a la sucesión específica de números, esto es  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . La suma está entonces dada por

$$\sum_{i=1}^n x_i.$$

En el ejemplo precedente ha sido  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 7, x_8 = 8, x_9 = 9, y x_{10} = 10$ . Se puede entonces enunciar simbólicamente la declaración del teorema como sigue:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

Esta declaración matemática ha sido motivo de debate a lo largo ya de un par de siglos, ante todo por la anécdota que la asocia con la infancia del gran matemático y físico prusiano Johann Carl Friedrich Gauss, quien fue detectado tempranamente por su entorno familiar y social como un niño prodigio. De acuerdo con la anécdota, que tiene mucho de leyenda, Carl Friedrich Gauss utilizó la fórmula, a la cual habría llegado mediante la reflexión, para responder al ejercicio de sumar los primeros 100 números enteros naturales, que le asignó su maestro J. G. Büttner en la escuela elemental Santa Catarina en Brunswick, en lo que hoy es Alemania. De acuerdo con diferentes fuentes Carl Friedrich Gauss tendría entre 7 y 10 años de edad al ocurrir dicho acontecimiento. El geólogo

**Recuadro 17.** Tradiciones, notaciones y tipografía

Los matemáticos se sirven con particular placer de símbolos para representar objetos matemáticos. Esto sin duda es práctico, ya que permite intercambiar conocimiento entre expertos, tal y como sucede en la música con la utilización de las partituras. La elección de los símbolos obedece a reglas bien establecidas que han ido tomando forma a lo largo del tiempo, lo cual ha consolidado convenciones y tradiciones. Algunos de los símbolos matemáticos más comunes tienen su origen en la Europa del siglo XVI (el siglo en el que se aceleró el expansionismo europeo). Es el caso, por ejemplo, del símbolo que se usa en el entorno matemático para representar la igualdad entre dos cantidades numéricas, esto es, el símbolo  $=$ , que fue publicado por primera vez en 1557 en el libro *The Whetstone of Witte* (en español: *La piedra de afilar del ingenio*), del médico y matemático galés Robert Recorde. Es importante resaltar que la hegemonía cultural occidental ha tendido a universalizar notaciones. Además, al igual que en toda actividad científica, el desarrollo de las matemáticas ha estado indisociablemente ligada a la evolución tecnológica. En el ámbito de las matemáticas esto se manifiesta, en lo que respecta a la notación, por el hecho de que en tiempos previos a la utilización de tecnologías electrónicas la impresión de textos matemáticos exigía un trabajo inmenso por parte de los impresores. Cada símbolo utilizado exigía la manufactura específica de un tipo (carácter) en aleación de plomo. Por ello existe una relación muy estrecha entre la evolución de las tecnologías tipográficas y la evolución de la notación matemática, y con ello de la ciencia matemática misma. Hoy en día las matemáticas disfrutan de sistemas informáticos de edición sencillos de utilizar, tanto para la composición como para la impresión, aunque esto puede ocasionar la indeseable uniformización del estilo de los textos, lo cual acarrea el aburrimiento por parte de los lectores al confrontarse con su lectura. Afortunadamente, muchos matemáticos disfrutaban la diversidad de estilos tipográficos disponibles hoy en día, evitando conscientemente la uniformización estilística de los textos.

alemán Wolfgang Sartorius von Waltershausen, primer biógrafo de Carl Friedrich Gauss, en su texto escrito en alemán *Gauss zum Gedächtnis* (en español: *En remembranza de Gauss*), publicado en 1856, refiere esta anécdota. Habría sido el mismo Carl Friedrich Gauss, en un momento de vanidad, quien se la habría contado un poco antes de morir.<sup>13</sup>

Antes de mostrar el procedimiento que habría seguido Carl Friedrich Gauss en su infancia, en lo que sigue presento una demostración que se sirve del método de inducción. El lector recordará lo que expuse a este respecto en el capítulo dedicado a los “Preliminares”.

#### DEMOSTRACIÓN

*Caso base:* La igualdad:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

es cierta para  $n = 1$ . En efecto, aplicando la expresión precedente se tiene que la suma del lado izquierdo de la igualdad que se quiere demostrar da lugar a

$$\sum_{i=1}^1 i = 1.$$

Al aplicar ahora la fórmula correspondiente al lado derecho de la igualdad se tiene:

$$\frac{1 \times (1 + 1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como puede verse, ambos cálculos coinciden; es decir, la igualdad que se quiere demostrar es válida para  $n = 1$ .

*Caso inductivo:* Se supone ahora que para un cierto número dado  $n = k$  del conjunto de los números enteros ordenados, esto es  $\{1, 2, \dots, k\}$ , es cierto que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k \times (k + 1)}{2}.$$

<sup>13</sup> Wolfgang Sartorius von Waltershausen representó a la Universidad de Gotinga durante el funeral de Carl Friedrich Gauss en 1855.

Se incrementa ahora  $k$  en una unidad y se procede entonces a demostrar que la satisfacción de la última igualdad implica el cumplimiento de la igualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1) \times (k+2)}{2}.$$

En efecto, tomando en cuenta lo que se ha supuesto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) \\ &= \frac{k \times (k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k \times (k+1)}{2} + \frac{(k+1)}{1} \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \frac{k \times (k+1) + 2 \times (k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k + 2 \times k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3 \times k + 2}{2} \end{aligned}$$

Dado que

$$k^2 + 3 \times k + 2 = (k+1) \times (k+2),$$

entonces se concluye que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1) \times (k+2)}{2},$$

que resultó de la suposición de que la igualdad que se quiere demostrar para todo entero  $n$  es válida para el entero arbitrario  $k$ . Esto finaliza la demostración.  $\square$

El pequeño cuadrado vacío que se encuentra a la derecha significa que la demostración ha terminado y que se ha llegado al resultado formulado

**Recuadro 18.** Representando el término de una demostración

Hasta hace no mucho tiempo se utilizaba en los textos matemáticos una frase para significar la conclusión de una demostración matemática. Euclides utilizó en los *Elementos* la frase escrita en griego antiguo ὅπερ εἶδει δεῖξαι (en alfabeto latino: hóper édei deíxai), que se solía traducir al latín como *quod erat demonstrandum* y se abreviaba en los textos matemáticos por medio del acrónimo escrito en negritas **QED**. Algunos matemáticos tradicionalistas lo siguen haciendo. Hoy en día se utiliza más frecuentemente un símbolo para indicar el punto final de la demostración. Esto porque el avance en las tecnologías tipográficas permite servirse sin gran problema de símbolos diversos y también por la influencia de la cultura de lo visual en todos los ámbitos de la ciencia. En lo que respecta a este libro, he elegido el cuadrado pequeño  $\square$  colocado en el extremo de la derecha de la línea que sigue al punto final de la demostración. Para significar el término de un ejemplo sigo la misma regla, aunque en tal caso utilizando el símbolo  $\blacksquare$ .

en la declaración original. El lector puede dirigirse al recuadro 18 para mayores detalles a este respecto.

¿Por qué se llegó a conclusión con la que termina la demostración precedente? Por lo siguiente:

PARA  $n = 1$ : es cierto que  $\sum_{i=1}^1 i = n \times (n + 1) / 2 = 1$ ;

PARA  $n = 2$ : es cierto que  $\sum_{i=1}^{k+1} i = (k + 1) \times (k + 2) / 2 = 3$ , tomando  $k = 1$ , esto es  $n = k + 1$ ;

PARA  $n = 3$ : es cierto que  $\sum_{i=1}^{k+1} i = (k + 1) \times (k + 2) / 2 = 6$ , tomando  $k = 2$ , esto es  $n = k + 1$ ,

y así subsecuentemente.

La demostración precedente corresponde, como lo afirmé antes de presentarla, a una demostración por inducción, que asegura el cumplimiento de la declaración matemática que concierne a este capítulo para

$n$  siendo cualquier entero. En cuanto a la anécdota que involucra a Carl Friedrich Gauss, él no se sirvió de este método (según lo afirmado por Wolfgang Sartorius von Waltershausen). Él habría seguido el procedimiento siguiente:

#### ARGUMENTO ACREDITADO A CARL FRIEDRICH GAUSS

Note que la fórmula:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

da el mismo resultado que la fórmula siguiente:

$$\sum_{i=1}^n i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1,$$

Esto debido a que sólo se ha cambiado el orden con el que se realizan las sumas parciales, y como bien se sabe el cambio en el orden con el que se adicionan dos sumandos no cambia el resultado. Este conocimiento sería de hecho parte de lo innato en nuestro sentido de los números.

Sumando ahora término a término ambas expresiones:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sum_{i=1}^n i = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & + & \\ \sum_{i=1}^n i = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

se obtiene la expresión siguiente:

$$2 \sum_{i=1}^n i = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ términos idénticos}}.$$

Esto es:

$$2 \sum_{i=1}^n i = n \times (n+1).$$

Se puede ahora modificar esta expresión dividiendo por 2 ambos términos a la izquierda y a la derecha de la igualdad. Esto da como resultado la igualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \times (n + 1)}{2},$$

tal y como lo afirma la declaración. Este fue el procedimiento que según Wolfgang Sartorius von Waltershausen habría seguido Carl Friedrich Gauss en su infancia.

El procedimiento supuestamente seguido por Carl Friedrich Gauss no es estrictamente hablando una demostración matemática formal. ¿Por qué? Debido a que en términos lógicos se tendría que verificar el procedimiento de Carl Friedrich Gauss para *todos* los números enteros. Se sabe que el procedimiento es válido para  $n = 10$ , como se ha probado ya con el ejemplo 4. El mismísimo Carl Friedrich Gauss validó el procedimiento, de acuerdo con la anécdota citada, para  $n = 100$ . ¿Qué pasa para  $n = 123\,212$ , o bien para  $n = 1\,243\,525$ ? En cada caso habría que verificar la validez del procedimiento, y este sería el caso para todos los valores considerados que puede tomar  $n$ , lo cual es a todas luces imposible de verificar, puesto que existen un número infinito de números enteros. Seguramente el lector podría argumentar que la validez del método de Carl Friedrich Gauss es evidente para todos los números enteros. Sin embargo, lo que es evidente para una persona no necesariamente lo es para otra y *aun lo evidente requiere ser demostrado*. Por ello, el procedimiento de Carl Friedrich Gauss no es una demostración de la declaración matemática que atañe a este capítulo. El método de inducción seguido en la demostración provee una validación formal y por ello cancela todo debate.

## EXTENDIENDO LA DECLARACIÓN

Como una extensión de lo que viene de ser presentado, considere la lista ordenada de los números enteros impares; esto es:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, ...

Considere ahora la suma de los  $n$  primeros números enteros, bajo la

condición de que  $n$  sea impar y mayor que 1; por ejemplo, para  $n = 3, 5, 7, 9$ , se tiene:

$$n = 3, \quad \sum_i^3 i = 9,$$

$$n = 5, \quad \sum_i^5 i = 25,$$

$$n = 7, \quad \sum_i^7 i = 49,$$

$$n = 9, \quad \sum_i^9 i = 81.$$

Observe que la suma de los primeros  $n$  números enteros impares, con  $n$  impar y mayor que 1, es exactamente igual al cuadrado de  $n$ , esto es  $n \times n$ . Aquí se impone la pregunta siguiente: *¿este resultado se puede concluir como una consecuencia del teorema que viene de ser demostrado?*

Dejaré la respuesta al lector para incitarlo a ejercitar su pensamiento matemático, y aprovechando puede abordar lo que resulta cuando se suman los  $n$  primeros números impares, bajo la condición de que  $n$  sea ahora mayor que 1 y además sea un número par.

Finalizo este capítulo complementando mi exposición en lo que sigue con una breve exploración de lo que ha acontecido recientemente con respecto a lo que vengo de presentar en el ámbito de la cultura de masas.

## JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS Y LA CULTURA DE MASAS

En 2005 el escritor alemán Daniel Kehlmann publicó su novela *Die Vermessung der Welt*, traducida al español como *La medición del mundo*, centrada en las vidas de Johann Carl Friedrich Gauss y del legendario sabio prusiano Alexander von Humboldt. Dicha novela, según el diario estadounidense *The New York Times*, habría sido la segunda mejor vendida en el mundo en el año 2006 y hacia el año 2012 se habrían vendido tan sólo en Alemania alrededor de 2.3 millones de ejemplares. Una cantidad sorprendente. La novela fue llevada al cine en el año 2012 en una producción alemana/austriaca que lleva el mismo título que la novela en alemán por el cineasta Detlev Buck. En dicha película se ilustra la famosa anécdota, que sirve de punto de partida para mostrar la precocidad del *Príncipe de*

*las matemáticas*. Es un tanto intrigante el porqué del interés de la cinematografía en torno a los matemáticos. En el recuadro 19 exploro brevemente el tema.

Para terminar con este capítulo y de acuerdo con lo narrado por Wolfgang Sartorius von Waltershausen, Carl Friedrich Gauss aplicó el método que se acaba de demostrar para obtener la suma de los primeros 100 números naturales. Esto es:

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5\,050,$$

y le habría entregado este resultado escrito al maestro en la pizarra de roca que usaba para hacer cálculos durante la clase. Para hacerlo requirió realizar sólo tres cómputos básicos (la división en este caso es extremadamente fácil de realizar, gracias a la notación posicional), mientras que sus compañeros en el aula y quizás también su maestro (si es que todo sucedió como el vanidoso Carl Friedrich Gauss se lo narró en su vejez a Wolfgang Sartorius von Waltershausen), tuvieron que realizar 99 sumas parciales, sin equivocarse, para llegar al resultado correcto.

Cabe indicar que una de las razones principales para buscar fórmulas que computan de manera compacta grandes cantidades de operaciones aritméticas radica precisamente en la minimización de la probabilidad de cometer errores. Ésta no es despreciable cuando se realizan a mano secuencias largas de operaciones aritméticas. El problema persiste al utilizar computadoras electrónicas digitales (omnipresentes hoy en día en todos los aspectos de nuestra vida), las cuales ejecutan operaciones aritméticas que dan lugar a resultados con error cuantificable. Este fue un tema de reflexión que ocupó la mente de Carl Friedrich Gauss a todo lo largo de su vida y que lo llevó, independiente del matemático francés Adrien-Marie Legendre, a inventar el famoso *método de los mínimos cuadrados*. Este permite comparar datos experimentales con datos generados por modelos matemáticos, para establecer qué tan bien éstos describen al fenómeno estudiado experimentalmente.

Dejo este capítulo —que espero que el lector haya disfrutado— para pasar a un nuevo teorema, en el que abordaré una de las propiedades fundamentales de los números racionales.

**Recuadro 19.** Cinematografía y matemáticas

Las matemáticas han sido un tema recurrente de interés para la cinematografía, lo cual en estos días ha dado lugar a la emergencia de sitios en internet dedicados al tema (existe una página al respecto en la *Wikipedia*). Esto es particularmente cierto en los Estados Unidos. En el sitio web *Maths Masters: Burkard Polster & Marty Ross* (<https://www.qedcat.com/>) está incluido un enlace a una base de datos (<https://www.qedcat.com/moviemath/index.html>), en la que se recopila un listado de 800 películas que hacen intervenir de una u otra manera a las matemáticas. En el ámbito académico, el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Harvard mantiene un servicio en internet en el que se muestra mediante videos cortos una colección de fragmentos de películas, no todas estadounidenses, en las que las matemáticas desempeñan un papel importante (<https://people.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/>). En ambos casos las recopilaciones se orientan a proveer herramientas audiovisuales que pueden ser utilizadas en procesos de enseñanza de las matemáticas. Al menos eso es lo que argumentan sus creadores. El sitio de Harvard, que también incluye algunos fragmentos de series de televisión, mantenido desde el año 2006 por el matemático suizo Oliver Knill, quien labora en dicha universidad como preceptor, es particularmente útil. De acuerdo con la Base de Datos Cinematográfica en Internet (IMDb: Internet Movie Database), la película de ficción más popular relacionada con las matemáticas es hasta la fecha *Good Will Hunting*, dirigida en 1997 por el cineasta estadounidense Gus van Sant y protagonizada por los también estadounidenses Robin Williams (magnífico) y Matt Damon, quien elaboró el guion junto con Ben Affleck, quien también actúa en la película. En dicha película las matemáticas son utilizadas como un telón de fondo para resaltar la excepcionalidad del personaje principal, quien escapa de la pobreza gracias a su talento excepcional (en este caso de índole matemática) y a la ayuda de un mentor también excepcional, uno de los grandes temas del cine estadounidense.

## Teorema 2. Todo número racional se puede expresar como una fracción irreducible

Tal y como lo expuse previamente en el capítulo dedicado a los “Conceptos preliminares”, el conjunto de los números racionales, del que se dijo que es representado usualmente mediante la letra  $\mathbb{Q}$  (esto es la letra  $Q$  impresa mediante la tipografía correspondiente a las negritas de pizarra), está constituido por todos aquellos números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador siempre diferente de cero, esto es, como fracciones. Sólo para fijar las ideas,  $\frac{1}{3}$  y 2 son números racionales. En efecto,  $\frac{1}{3}$  está formado por la razón —es decir, el cociente— que forman 1 y 3, con el primer número entero actuando como numerador y el segundo número entero actuando como denominador. En cuanto al número entero 2, también es un número racional, ya que se puede representar en términos fraccionales como  $2 = \frac{2}{1}$ . Todo esto se resume simplemente escribiendo  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$  y  $2 \in \mathbb{Q}$  (o bien  $\frac{1}{3}, 2 \in \mathbb{Q}$ ). Seguramente más de un lector se sentirá incómodo al rememorar sus días en la escuela secundaria y recordar el sufrimiento que le significó en su momento el aprendizaje de la aritmética de las fracciones, esto es, los malditos quebrados. Le recomiendo al lector respirar profundamente y después observar con detenimiento las siguientes operaciones aritméticas que involucran números racionales:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{8} - \frac{3}{5}, \quad \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{13}{17}\right), \quad 1 + \frac{5}{2}, \quad \frac{3}{4} + 2\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{10}}.$$

En palabras, las operaciones aritméticas precedentes corresponden a

- un tercio más tres quintos,

- un octavo menos tres quintos,
- un cuarto por trece diecisieteavos,
- un entero más cinco medios,
- tres cuartos más dos enteros un octavo más un tercio,
- dos séptimos entre tres décimos.

Posiblemente le lleguen al lector algunos recuerdos nostálgicos almacenados en la memoria, aunque lo más seguro es que le vengan a la mente recuerdos algo desagradables. ¿Me equivoco? Posiblemente algunos lectores hayan tenido el reflejo de computar mentalmente el resultado de cada operación. No es fácil desprenderse de los hábitos, sean éstos malos o buenos.

Regresando a nuestro punto de partida, este capítulo está dedicado a una propiedad fundamental de las fracciones que caracteriza su representación *más compacta*; esto es, cuando se representan como *fracciones irreducibles*.

Antes de abordar la demostración, me parece que es oportuno recordar las reglas aritméticas que se utilizan para sumar, restar, multiplicar y dividir dos números racionales dados. Para ello, considere entonces dos números racionales representados simbólicamente mediante las letras minúsculas  $x$  y  $y$ , expresados mediante fracciones, esto es:

$$x = \frac{a}{b}$$

y

$$y = \frac{c}{d},$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son números enteros (esto es,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ), con  $b$  y  $d$  distintos de cero. Entonces, las operaciones aritméticas básicas entre estos números están dadas como sigue:

SUMA DE FRACCIONES:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}.$$

RESTA DE FRACCIONES:

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}.$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:

$$x \times y = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES:

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Note que este caso también precisa que  $c$  sea diferente de cero, para evitar que el numerador resultante —es decir,  $b \times c$ — sea igual a cero.

Este ha sido, pues, un breve repaso de la aritmética de las fracciones. Para lo que sigue se requerirá la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 13** (Máximo factor común). *Para dos números enteros dados, digamos  $n$  y  $m$ , su máximo factor común, digamos  $q$ , es el número entero más grande que los divide de manera exacta. Esto es:*

$$n = q \times x$$

y

$$m = q \times y,$$

donde  $x$  y  $y$  son números enteros que sólo tienen al número entero 1 como factor común.

Tomando en cuenta la definición precedente se tiene la caracterización de los números racionales en términos de fracciones irreducibles como sigue:

**DEFINICIÓN 14** (Fracción irreducible). *Para un número racional dado, digamos  $p$ , se dice que su representación como fracción, digamos:*

$$p = \frac{n}{m},$$

donde  $n$  y  $m$  son números enteros, con  $m$  distinto de cero, corresponde a una fracción irreducible si el máximo factor común de  $n$  y de  $m$  es el número entero 1.

Me parece conveniente incluir aquí un ejemplo para recordar lo que significa que dos números posean factores comunes y también para clarificar el sentido de lo que es una fracción irreducible:

EJEMPLO 5. El número racional  $x = \frac{1}{2}$  —esto es, un medio en lenguaje llano (o 0.5 en notación decimal)— es una fracción irreducible, mientras que el número  $y = \frac{8}{10}$  —es decir, ocho décimos— no lo es. Efectivamente, en lo que respecta al número representado mediante la letra  $x$ , cuyo numerador es igual a 1 y cuyo denominador es igual a 2:

$$x = \frac{1}{2} = \frac{\textcircled{1} \times 1}{\textcircled{1} \times 2},$$

es decir, el numerador y el denominador sólo tienen al número entero 1 como su máximo factor común (lo cual denoto aquí rodeándolo con un círculo. Por otro lado, el numerador del número  $y$  se puede factorizar como sigue:

$$8 = 1 \times 2 \times 4$$

y su denominador como

$$10 = 1 \times 2 \times 5.$$

Como puede verse:

$$y = \frac{8}{10} = \frac{\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times 4}{\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times 5} = \frac{4}{5}.$$

En este caso, el máximo factor común del número entero 8 y del número entero 10 es igual a 2, esto es, el producto de los factores comunes que comparten los números 8 y 10. Debido a esto,  $\frac{8}{10}$  no corresponde a una representación de fracción irreducible de  $y$ . Sin embargo, la fracción  $\frac{4}{5}$  sí expresa como una fracción irreducible el número racional representado mediante la letra  $y$ . Para llegar de  $\frac{8}{10}$  a  $\frac{4}{5}$  se cancelaron los factores comunes de 8 y de 10. ■

El lector podrá notar que en el ejemplo precedente el número racional  $y = \frac{8}{10}$  se llevó a una representación como fracción irreducible en un

número finito de pasos, que consistieron en ir eliminando, esto es, cancelando, los factores comunes en los numeradores y los denominadores respectivos que fueron apareciendo durante el proceso de reducción. En este caso los números enteros 1 y 2. Como se verá, es este proceso de cancelación de los factores comunes el que subyace a la demostración de la declaración matemática que concierne a este capítulo. Tal proceso implica un número finito de cancelaciones, y es esta finitud la que permite la construcción de la demostración elegida.

En lo que respecta al conjunto de los números enteros, esto es:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

el lector notará que todos y cada uno de ellos corresponden a una fracción irreducible. Por ejemplo, el número entero 4 se puede escribir como una fracción irreducible mediante la fracción  $\frac{4}{1}$ .

Antes de proceder a la declaración matemática que concierne a este capítulo, introduciré algunos comentarios sobre la representación de conjuntos, ya que se requerirá más tarde.

Se suele representar un conjunto determinado listando los elementos que lo constituyen; por ejemplo, el conjunto de los cinco primeros números naturales, los cuales coinciden con el conjunto de los 5 primeros números enteros positivos, esto es, 1, 2, 3, 4 y 5, puede representarse así:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Aunque también se puede representar de manera compacta especificando la propiedad que poseen todos los elementos como parte del conjunto. En el caso de los cinco primeros números enteros positivos, se puede utilizar la representación siguiente:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

Esto en *lenguaje natural* se puede expresar de manera llana como:

*El conjunto de todos los números que pertenecen a los números naturales, esto es lo que significa el término  $x \in \mathbb{N}$ , tales que todos ellos son mayores o iguales a 1 y menores o iguales a 5. Esto es lo que significa la notación  $1 \leq x \leq 5$ .*

Notará el lector que también se puede representar el conjunto precedente de manera aún más compacta como:

$$\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \leq 5\}.$$

La manera como se represente un conjunto depende del uso que se le dé en una declaración matemática. En general, en textos matemáticos se prefiere la utilización de la notación más compacta, sin demérito de la claridad. Esto seguramente tuvo su origen en Occidente en la necesidad de reducir tanto el consumo de papel como el esfuerzo de impresión en los inicios de la aplicación de la tipografía móvil a la manufactura de libros *de índole matemática*, lo cual aconteció en Italia en la segunda mitad del siglo xv.<sup>14</sup> Hoy en día cada área de las matemáticas elabora sus propias convenciones notacionales, y los matemáticos profesionales suelen manejarlas con suma facilidad. Esto de hecho es parte de su bagaje profesional. El problema de utilizar notaciones compactas radica en que los textos matemáticos adquieren desafortunadamente un aspecto un tanto críptico, algo que no necesariamente le desagrada a muchos matemáticos atraídos por lo hermético.

Procedo ahora con la demostración. Me permito recordar que se debe demostrar que se puede llevar todo número racional a una representación como fracción irreducible.

#### DEMOSTRACIÓN

Suponga que  $r$  representa un número racional. Sea ahora  $S$  el conjunto definido como sigue:

$$S := \{q \in \mathbb{Z}_+ \mid r \text{ se expresa como } p/q \text{ para algún número entero } p\}.$$

Dado que el número  $r$  es racional, sabemos que  $S$  es un conjunto no vacío, esto es existe al menos un número  $q$  tal que  $r$  se puede escribir como una fracción,teniéndolo como denominador.

<sup>14</sup> En aquella época el papel se hacía básicamente de trapos de lino y su proceso de manufactura distaba mucho de lo que hoy en día se hace al procesar pulpa de madera para producir papel. No había tanto papel disponible y la mayoría del que se producía se utilizaba en asuntos eclesiásticos. La industria del papel requirió de la máquina de producción continua debida al inventor francés Louis Nicolas Robert, quien en respuesta a una comisión del Ministerio de Finanzas del gobierno revolucionario la presentó el 9 de septiembre de 1798. Obtuvo la patente respectiva el 18 de enero de 1799, aunque nunca se benefició realmente de su invención.

**Recuadro 20.** El buen ordenamiento

Se dice que un conjunto está bien ordenado si al elegir cualquier parte de él dicha parte incluye un elemento que es más pequeño que todos los otros elementos incluidos en ella, *estando la noción de tamaño bien definida*. El conocido *teorema del buen ordenamiento* declara que los elementos de todo conjunto pueden ordenarse de manera que constituya un conjunto bien ordenado. Obviamente, cada caso requiere de un criterio específico de ordenamiento, expresado en términos de la noción de tamaño de los elementos constitutivos. Para la mayoría de los matemáticos contemporáneos este enunciado matemático constituye de hecho un axioma, ya que afirma que su validez es evidente (esto es, se le da por evidentemente verdadero), aunque la tradición sigue imponiendo su caracterización como teorema.

Puesto que el conjunto  $S$  se puede escribir como un conjunto bien ordenado (véase el recuadro 20), es completamente cierto que dicho conjunto posee un elemento que es más pequeño que todos los demás. En lo que sigue se denomina  $q_0$  a dicho elemento. Dado que todos los elementos de  $S$ , una vez bien ordenado, son positivos y aparecen de menor a mayor, el número  $q_0$  se toma como el primero en la lista.

Como consecuencia de lo que viene de exponerse, una vez elegido  $q_0$  para la representación del número  $r$  como fracción, existe algún entero correspondiente  $p_0$  tal que

$$r = \frac{p_0}{q_0};$$

es decir, se puede representar al número racional  $r$  como una fracción cuyo denominador es el elemento más pequeño del conjunto bien ordenado  $S$ , esto es,  $q_0$ , para el cual existe sin duda alguna un numerador asociado, a saber:  $p_0$ .

Se quiere demostrar entonces que el número racional  $p_0/q_0$  es una fracción irreducible. La declaración matemática original se ha transformado en esta nueva aseveración y para demostrarla empezamos por suponer que tal cosa no es cierta.

Es decir, *se analizan las consecuencias de que se dé por cierto que  $p_0/q_0$  no es una fracción irreducible.*

Recuérdese que  $q_0$  se eligió como el más pequeño elemento del conjunto bien ordenado  $S$ .

Conforme a la suposición, existe un número entero  $k > 1$  que divide tanto a  $p_0$  como a  $q_0$ . Esto porque se está asumiendo que  $p_0/q_0$  no constituye una fracción irreducible. En consecuencia, esto significa que existen necesariamente los números enteros  $p_1$  y  $q_1$  tales que

$$p_0 = k \times p_1$$

y

$$q_0 = k \times q_1.$$

Es decir, como  $p_0/q_0$  no es una fracción irreducible, entonces  $p_0$  y  $q_0$  tienen factores comunes distintos de 1. Dado que  $k > 1$  es positivo y  $q_0$  es también positivo, se tiene que

$$q_1 = \frac{q_0}{k}$$

es también positivo y estrictamente más pequeño que  $q_0$ .

Lo que viene de demostrarse lleva a concluir que el racional  $r$  se puede escribir como la fracción  $p_1/q_1$ , con un denominador  $q_1$  más pequeño que  $q_0$ , lo cual es una contradicción, ya que se eligió a  $q_0$  como el elemento más pequeño del conjunto bien ordenado  $S$ .

En virtud de la contradicción lógica a la que se ha llegado, se concluye la validez de la declaración matemática que concierne a este capítulo.  $\square$

## LA UTILIDAD DE SUPONER LO ABSURDO

Al igual que en el capítulo precedente, la demostración que acabamos de desarrollar corresponde a un ejemplo de *demonstración por contradicción*. El lector puede remitirse a los “Conceptos preliminares” para recordar lo que esto significa. La demostración por contradicción, también conocida como *demonstración por reducción al absurdo*, tiene su origen en Occidente en el denominado *principio de no contradicción*, el cual presento en el recuadro 21. Algunos estudiosos del tema que comprende este libro defienden

**Recuadro 21.** Principio de no contradicción

En Occidente, este sacrosanto principio de la reflexión filosófica se formula por primera vez de manera explícita en la obra *Metafísica* de Aristóteles, quien lo consideró como una necesidad absoluta para la lógica, de la manera siguiente:

*Es imposible que un mismo atributo pertenezca y no pertenezca al mismo tiempo y bajo el mismo contexto a la misma cosa.*

La formulación aristotélica se deriva de lo expresado al respecto por Platón en su obra la *República*. Para Aristóteles, el principio de no contradicción no puede deducirse a partir de principios más simples.

que Euclides prefirió en los *Elementos*, en la medida de lo posible, utilizar el método de demostración por contradicción para evitar así cualquier clase de debate con sus colegas. Esto porque en su tiempo los pensadores griegos construían sus argumentaciones en el contexto de debates entre colegas, lo cual ilustra magistralmente Platón en sus famosos *Diálogos*, una obra cumbre del pensamiento no sólo occidental sino universal. Estos debates solían tener lugar en público. Al centrarse en demostraciones con base en el método por contradicción, Euclides se habría ahorrado así discusiones inútiles e innecesarias, ya que difícilmente alguno de sus colegas lo habría rebatido sin hacer el ridículo. Justamente una de las acepciones de este término se refiere a lo que es absurdo, esto es *carente de lógica* y por ello motivo de burla, y a nadie le gusta ser víctima del escarnio público.

Como puede verse, la dinámica social que prevalecía entre la comunidad de sabios en la Antigua Grecia en tiempos de Euclides desempeñó un papel fundamental en la evolución de la ciencia matemática. Como en toda actividad social, las matemáticas contemporáneas guardan en sus modos de ser la herencia de las interacciones sociales complejas que la han ido sustanciando a lo largo del tiempo. Esta herencia comprende tanto los problemas que le interesan a las matemáticas, así como los modos de abordar su resolución.



## Teorema 3. La raíz cuadrada del número 2 no es un número racional

Este teorema es sin lugar a dudas una de las declaraciones matemáticas más famosas de todos los tiempos y se presenta con frecuencia en las páginas iniciales de los libros introductorios al *análisis matemático*, la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las funciones y sus generalizaciones mediante el método de los límites, de lo cual se habla sucintamente en el recuadro 22 (p. 121). En el capítulo previo se abordó la demostración de la declaración matemática que asegura que todo número racional puede representarse por medio de una fracción irreducible. En este capítulo se aborda la demostración de que la raíz cuadrada del número entero 2 *no es* un número racional; esto es, no se le puede representar por medio de una fracción irreducible. Lo más interesante de esta declaración matemática es que está asociada al descubrimiento de los números irracionales por parte de los matemáticos de la Antigua Grecia. Dicho descubrimiento –uno de los grandes acontecimientos en la historia de las matemáticas, que trazó la senda hacia el predominio de la abstracción– mostró además que existían números que no se podían representar en términos de una longitud o como el cociente de un par de números enteros, esto es, como fracciones, sino como *la solución de una ecuación algebraica*. En este caso la ecuación algebraica se formula en palabras como sigue:

*Hallar un número tal que al multiplicarlo por él mismo nos dé como resultado el número entero igual a 2.*

Con el descubrimiento de la irracionalidad, se agregaron a los números ya conocidos los elementos de una nueva familia, asociada entonces a

propiedades de objetos geométricos. Este es el caso del número  $\sqrt{2}$ ,<sup>15</sup> es decir, el número que al multiplicarlo por sí mismo da como resultado el número entero 2, a saber:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

Este número tiene un significado geométrico, pues se corresponde con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos que tienen la misma longitud, valiendo ésta 1. Esto se muestra en la figura 3 (p. 122), que traduce en términos visuales la ecuación algebraica asociada a  $\sqrt{2}$  a una representación geométrica.

El ir y venir entre el álgebra y la geometría es una de las características principales del pensamiento matemático, el cual suele servirse de lo geométrico para hallar la solución de ecuaciones algebraicas. En lo que concierne al teorema al que está dedicado este capítulo, el objetivo no es hallar el valor de  $\sqrt{2}$ , sino demostrar que no lo podemos encontrar en el conjunto de los números racionales. Una de las demostraciones más simples de este teorema se debe al legendario matemático griego Euclides, quien, como se ha indicado previamente, trabajó en Alejandría, Egipto, 300 años antes de nuestra era. Euclides incluyó su demostración en su celebre tratado matemático los *Elementos*, texto que estableció los métodos de aplicación del razonamiento hipotético-deductivo en la construcción del conocimiento matemático de corte geométrico. Debido a esto, se suele reconocer a Euclides como el padre fundador de la geometría. La demostración que él propuso pertenece a la clase de demostraciones por contradicción, las que él prefería, como lo hemos manifestado en el capítulo precedente. En lo que sigue me serviré entonces de la metodología propuesta por Euclides.

<sup>15</sup> El símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$ , derivado de la letra minúscula *r* (asociada a la representación de la palabra en latín *radix*, que en español significa *raíz*), fue introducido en el siglo xvi para representar la raíz cuadrada de un número por el matemático alemán Christoff Rudolff en su libro *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeincklich die Coß genennt werden* (en español: *Cálculo ágil y bonito a través de las ingeniosas reglas del álgebra, como comúnmente se llama a la variable desconocida*), publicado en Estrasburgo en 1525 y que constituye el primer libro de álgebra publicado en lo que a la sazón era una ciudad imperial del Sacro Imperio Romano-Germánico y que hoy es parte de Francia. El término *Coß* se utilizaba en la Alemania del Renacimiento para referirse a la variable desconocida en las operaciones algebraicas, y el matemático alemán Adam Ries se sirvió de dicho término para intitular el libro que escribió en 1524, el cual versaba sobre álgebra tratada de manera didáctica, pero que no fue publicado hasta 1992, por la editorial científica alemana Teubner-Verlag (sí, 468 años después).

**Recuadro 22.** Límites y métodos infinitesimales

El concepto de límite está íntimamente relacionado con el de cantidad infinitesimal, es decir, una cantidad que está más cerca del 0 que cualquier número real estándar, pero que no es cero, por lo que también se dice que el análisis matemático estudia funciones y sus generalizaciones por medio de métodos infinitesimales. La noción inicial de infinitesimal se acredita a Arquímedes, quien en la Antigua Grecia se sirvió de ella, de manera intuitiva, en diversos procesos de demostración de enunciados matemáticos. Esta noción tuvo una gran importancia en la invención del *cálculo* por Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton (en ese orden de importancia) en el siglo XVII, hecho que influyó en la aplicación de métodos matemáticos a la comprensión de fenómenos naturales complejos, tales como los que se refieren a la mecánica de los cuerpos celestes. Así, por ejemplo, el matemático francés Pierre Varignon formalizó en el año 1700, aplicando los conceptos del cálculo, la noción de aceleración de un objeto material que se desplaza como una diferencia infinitamente pequeña en la velocidad durante un tiempo infinitamente pequeño necesario para modificar dicha velocidad. Cabe mencionar que el punto de partida de Gottfried Wilhelm Leibniz fue el desarrollo por parte del filósofo matemático teólogo e inventor francés Blaise Pascal de métodos de determinación de áreas de superficies acotadas por curvas sinusoidales.

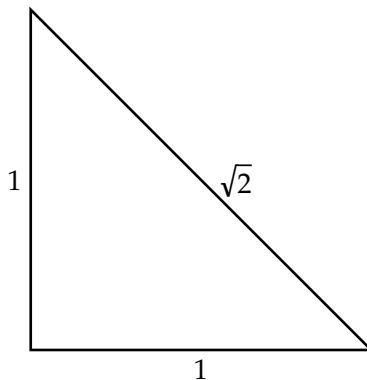
**DEMOSTRACIÓN**

La demostración comienza por suponer que la raíz cuadrada del número entero 2, representada mediante el símbolo  $\sqrt{2}$ , es igual a un número racional, esto es, a un cociente de dos números enteros.

*Se parte entonces de la afirmación de que la declaración que nos concierne es falsa y se sigue el método de demostración por contradicción.*

Se supone, pues, que  $\sqrt{2}$  se puede representar como una fracción:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m},$$



**Figura 3.** Raíz cuadrada de 2

La figura muestra la representación gráfica del significado de la raíz cuadrada de 2, esto es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales y tienen a 1 por longitud.

en la cual tanto el numerador como el denominador, esto es,  $n$  y  $m$ , respectivamente, son números enteros. Se supone, como es debido, que  $m$  es diferente de 0.

Se elevan ahora al cuadrado los dos términos de la igualdad precedente; esto es, se multiplican por sí mismos los términos de la derecha y la izquierda de la igualdad:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\frac{n}{m}\right) \times \left(\frac{n}{m}\right),$$

lo cual da el resultado siguiente:

$$2 = \frac{n \times n}{m \times m}$$

o lo que es lo mismo:

$$2 = \frac{n^2}{m^2}.$$

Multiplicando ambos lados de esta igualdad por el cuadrado de  $m$ , es decir, por el número entero  $m^2 = m \times m$ , se obtiene:

$$m^2 \times 2 = m^2 \times \frac{n^2}{m^2} = \frac{m^2 \times n^2}{m^2}.$$

Por lo tanto,

$$2 \times m^2 = n^2.$$

De esto se concluye necesariamente que  $n^2$  es un número par, ya que es igual al número 2 multiplicado por un número entero.

Puesto que  $n^2$  es un número par, entonces  $n$  debe ser también un número par (dejo que el lector verifique esta aseveración, lo cual puede hacer utilizando el método de contradicción suponiendo que  $n^2$  es par y que  $n$  es impar...).

Debido a que  $n$  es un número par, también se le puede escribir como

$$n = 2 \times x,$$

donde  $x$  es un número entero. Substituyendo este resultado, esto es,  $n = 2 \times x$ , en  $2 \times m^2 = n^2$  se llega a

$$2 \times m^2 = n^2 = (2 \times x)^2 = 4 \times x^2.$$

Dividiendo entonces ambos lados por 2 se tiene:

$$m^2 = 2 \times x^2.$$

Esto significa obviamente que  $m$  es un número par. Se supone entonces que

$$m = 2 \times y,$$

para  $y$  un número entero. Hasta aquí la suposición de que  $\sqrt{2}$  es un número racional, representado por el cociente de números enteros  $n/m$ , nos ha llevado a concluir que tanto  $n$  como  $m$  son números enteros pares, esto es, ambos números son múltiplos del número 2. En consecuencia:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{2 \times x}{2 \times y}.$$

Eliminando entonces en el numerador y en el denominador al número 2 se tiene que  $\sqrt{2}$  es igual a  $x/y$ , que es un cociente más simple que el cociente original  $m/n$ .

Se encuentra uno entonces en una situación similar a la inicial. Aplicando el procedimiento precedente ahora a  $x/y$  se puede llegar a

un cociente aún más simple, por ejemplo  $e/f$ , para  $e$  y  $f$  números enteros, con  $f$  diferente de cero. Sin embargo, se sabe que un número racional *no puede simplificarse indefinidamente*, esto es, siempre puede escribirse como una fracción irreducible. En consecuencia existe siempre un racional más simple que todos los demás y la suposición original de que  $\sqrt{2}$  es igual a  $n/m$  no obedece a esta regla. Se llega entonces a una contradicción; a saber: se llega a la conclusión de que si se supone que  $\sqrt{2}$  es racional, no se le puede representar como una fracción irreducible.

Así, la suposición de que  $\sqrt{2}$  es un número racional da lugar a una contradicción insostenible. Se concluye entonces que  $\sqrt{2}$  es un número irracional, esto es, no se puede escribir como el cociente de dos números enteros, pues viola la propiedad que poseen todos los números racionales de poseer una representación como fracción irreducible.  $\square$

Como puede verse, la demostración que acabamos de desarrollar utiliza el segundo teorema, que se demostró en el capítulo anterior. En matemáticas, como en toda ciencia, el conocimiento nuevo se construye edificándolo sobre el conocimiento previo. En la siguiente sección me extiendo brevemente sobre esta característica fundamental de la ciencia matemática. Asimismo, en el recuadro 23 hago un breve resumen de la historia y la leyenda en torno al descubrimiento de los irracionales.

## LA EDIFICACIÓN SIN FIN DE LO MATEMÁTICO

Puede visualizarse a las matemáticas, al igual que toda ciencia, como un edificio que se va construyendo con los logros previos, y cada nuevo resultado abre así la posibilidad de logros nuevos, no siempre previstos. Como en todos los aspectos de nuestra vida, lo contingente tiene un papel importante en la ciencia. Confrontarse a lo inesperado, si se es capaz de identificarlo, es consustancial a la labor del científico profesional. Esta dependencia entre lo nuevo y lo ya realizado implica la necesidad, por parte de quienes se comprometen a adquirir una formación profesional en el campo de las matemáticas, de seguir un entrenamiento específico.

**Recuadro 23.** La revolución de los irracionales

El descubrimiento de la existencia de los números irracionales es, sin la menor duda, uno de los hechos más notables en la ya larga historia de las matemáticas en Occidente. Se suele afirmar, aunque con pocas evidencias documentadas, que la naturaleza irracional de la raíz cuadrada de 2, esto es,  $\sqrt{2}$ , fue uno de los secretos de la *escuela pitagórica*, la cofradía científica y religiosa fundada por Pitágoras en el siglo VI a.C. en lo que hoy es Crotona, Italia; y se suele acreditar el descubrimiento de la naturaleza de este número a su discípulo Hipaso de Metaponto. Los detalles del descubrimiento en el caso de la escuela pitagórica son elusivos debido al secretismo bajo el que ésta trabajaba. El descubrimiento de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 fue sorprendente para los matemáticos de la Antigua Grecia, al mostrar que los números racionales no eran suficientes en el proceso de obtención de soluciones a problemas tales como el siguiente: ¿existe un número racional tal que al multiplicarlo por sí mismo dé como resultado el número entero 2? Como se demuestra en este capítulo no existe tal número racional (¡su existencia es absurda!). La insuficiencia de los números racionales llevó al descubrimiento de los números irracionales, y con ello se potenció la liberación de los procesos cognitivos requeridos para el progreso de la ciencia matemática.

En términos de la formación de los matemáticos profesionales dedicados a la investigación, gran parte de ésta se centra en el aprendizaje de los resultados previos que definen su área específica de interés en las matemáticas. Tal clase de aprendizaje cataliza el desarrollo de las habilidades cognitivas necesarias para abordar la construcción de conocimiento matemático.

La meta de la formación académica de los matemáticos es lograr entonces que el matemático continúe mediante su quehacer profesional el proceso de construcción del edificio matemático y, de ser posible, que construya nuevas extensiones de éste. Dedico el recuadro 24 a algunos

**Recuadro 24.** Formación académica de los matemáticos

¿Cómo se forma un matemático? Antes de abordar la respuesta me parece pertinente puntualizar una vez más que al hablar de matemáticos profesionales me refiero a quienes se dedican a la investigación científica. En Occidente, la formación requiere alrededor de 8 años a partir de la finalización de la educación media superior, en la que se adquiere la formación básica en geometría y en álgebra, así como en trigonometría y en cálculo diferencial e integral. El entrenamiento inicia con la realización de estudios de licenciatura en matemáticas, a los cuales se accede mediante un proceso de selección que evalúa la capacidad de resolver problemas de índole matemática. Los cursos se centran en aspectos avanzados de las matemáticas en áreas tales como el cálculo, el álgebra abstracta y las ecuaciones diferenciales. La formación se suele dividir en matemáticas puras y en matemáticas aplicadas y dura por lo general cuatro años. El licenciado en matemáticas suele finalizar sus estudios con una tesis que presente un proyecto de investigación bajo la tutoría de un matemático profesional. La siguiente etapa comprende la realización de estudios de maestría, que suelen durar alrededor de dos años. La maestría puede estar orientada a las matemáticas puras o bien a las aplicadas. En este segundo caso el candidato es formado para resolver problemas de índole científico-tecnológica. En el primero, el candidato es entrenado para desarrollar su capacidad de construir nuevas teorías matemáticas. Después de la maestría el candidato interesado en dedicarse a la investigación debe obtener obligatoriamente una formación doctoral (algunos candidatos sobresalientes acceden directamente al doctorado al finalizar la licenciatura). Esta suele durar alrededor de tres años, en la que se adquiere autonomía en la realización de proyectos de investigación matemática. Tanto en la maestría como en el doctorado se combinan la formación mediante cursos de alta especialización con el entrenamiento tutorial. Hoy en día la formación suele continuar después del doctorado a través de la realización de estancias posdoctorales anuales.

aspectos de la formación académica de los matemáticos profesionales, que pueden ser del interés de algunos lectores.

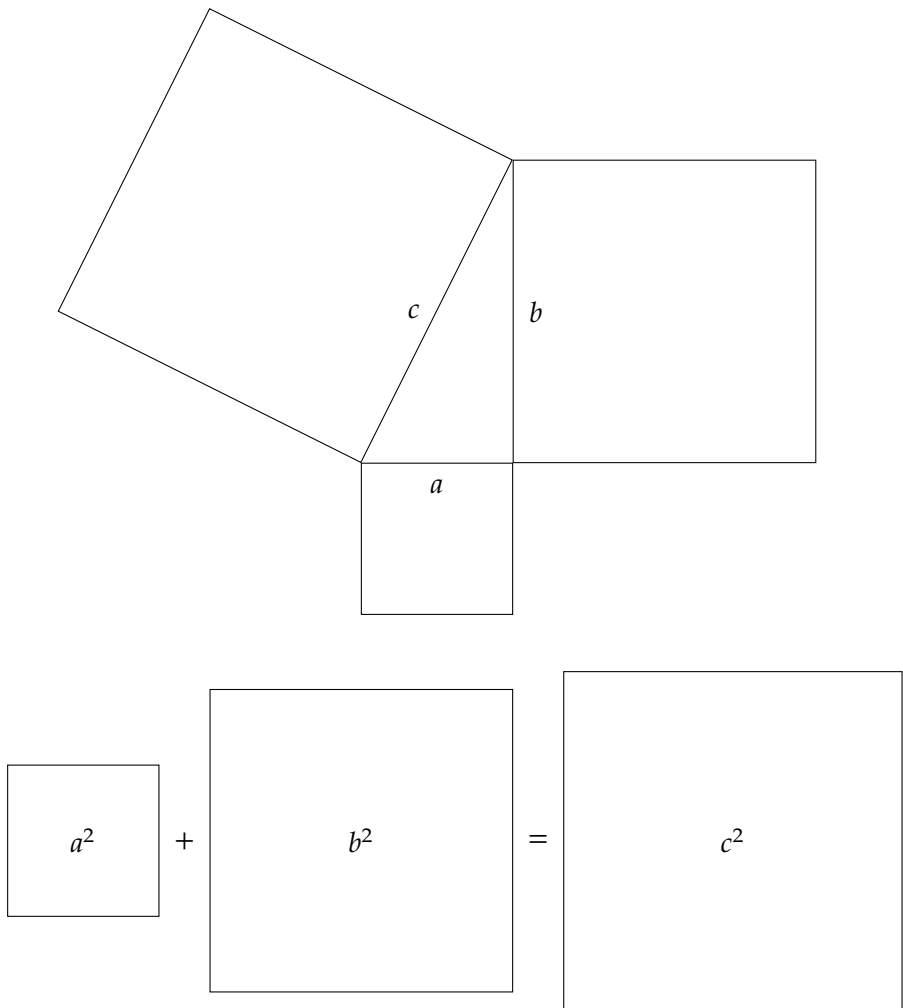
En el capítulo siguiente asociaré a la raíz cuadrada de 2, esto es,  $\sqrt{2}$ , con una propiedad de cierta clase de triángulos. Con ello se verá cómo la exigencia de resolver una ecuación algebraica lleva a darle a su solución una interpretación netamente geométrica.



## Teorema 4. En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

Pitágoras viene inmediatamente a nuestra mente cuando se lee el enunciado de la declaración matemática que se aborda en este capítulo, pues se trata precisamente del conocido *teorema de Pitágoras*. Esta declaración matemática se presenta de manera visual en la figura 4. Debido al gran interés público que ha revestido este teorema a lo largo ya de siglos, existe una gran cantidad de demostraciones que le están asociadas, e incluso una de ellas está incluida en los *Elementos* de Euclides; se trata específicamente de la proposición 47 del libro I. El teorema de Pitágoras es tal vez la declaración matemática más famosa hoy en día, y esto se debe a su uso recurrente en cursos de matemáticas que se imparten en las escuelas secundarias a nivel mundial. Basta con un pequeño ejercicio en internet –utilizando el motor de búsqueda de Google, desde la Ciudad de México el 26 de agosto de 2023– para convencerse de la sorprendente popularidad de este teorema: alrededor de 5 370 000 resultados hallados en 0.47 segundos al introducir “teorema de Pitágoras” (en inglés, utilizando “pythagorean theorem”, se obtuvieron en torno a 16 000 000 de resultados en 0.43 segundos). En comparación, el motor de búsqueda de Google, lanzado desde el mismo lugar y en la misma fecha, sólo dio un poco más 48 000 resultados en 0.43 segundos al introducir “conjetura de Poincaré”, cuya demostración le valió en el año 2006 a Grigori Perelmán la Medalla Fields (la cual rechazó). En este caso no es muy difícil descubrir cuál de los dos resultados tiene mayor significación cultural para los hablantes

del español. ¿No es así? En el motor de búsqueda de Google, usado desde la Ciudad de México el 26 de agosto de 2023, el teorema de Pitágoras se



**Figura 4.** Teorema de Pitágoras

En la parte superior de esta figura se muestra un triángulo rectángulo que posee los catetos de longitud  $a$  y  $b$ . Su hipotenusa una longitud de  $c$ . El teorema de Pitágoras afirma que  $a^2 + b^2 = c^2$ , lo cual se ilustra en la parte inferior de la figura.

menciona más de cien veces (111.41 veces, para ser exactos) el número de veces que se menciona a la conjetura de Poincaré en páginas web que proveen información en español. El resultado es muy diferente cuando se buscan únicamente resultados en páginas redactadas en francés. En efecto, la conjetura de Poincaré es 2.65 veces más popular que el teorema de Pitágoras (en francés, utilizando “théorème de Pythagore”, se obtuvieron alrededor de 447 000 resultados en 0.38 segundos). El lector podrá apreciar que los franceses son algo chovinistas cuando se trata de promover los logros de sus grandes matemáticos. Supongo que quienes tenemos al español como nuestra lengua materna sentiríamos lo mismo que los franceses si se tratara de promover conocimiento matemático trascendente logrado por matemáticos de habla hispana. ¿Qué opinas de este asunto, querido lector?

Antes de terminar este paréntesis, y siguiendo la moda de estos días, utilicé la aplicación informática ChatGPT (versión 3.5), esto es, el chatbot de inteligencia artificial desarrollado en 2022 por la empresa estadounidense OpenAI, para formularle la pregunta siguiente:

A partir de la información que posees, ¿qué resultado científico es más popular: ¿el teorema de Pitágoras o la conjetura de Poincaré?

Esta fue su respuesta:

Hasta mi última actualización en septiembre de 2021, el teorema de Pitágoras es definitivamente más popular y ampliamente conocido que la conjetura de Poincaré en la cultura general. El teorema de Pitágoras es un resultado fundamental en geometría que establece una relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Es enseñado en la mayoría de los currículos escolares y es ampliamente reconocido en la sociedad.

Por otro lado, la conjetura de Poincaré es un problema más avanzado en la topología y la geometría diferencial. Fue propuesta por el matemático francés Henri Poincaré en 1904 y se refiere a las propiedades de las variedades tridimensionales. Fue uno de los problemas más famosos y desafiantes en matemáticas hasta que el matemático ruso Grigori Perelmán demostró su veracidad entre 2002 y 2003. La demostración de Perelmán fue un logro significativo y llevó a la resolución de uno de los problemas más destacados en matemáticas,

pero su reconocimiento no alcanza el nivel de familiaridad del teorema de Pitágoras debido a su naturaleza altamente especializada.

Sin embargo, ten en cuenta que mi información está actualizada sólo hasta septiembre de 2021, por lo que te recomiendo verificar fuentes más recientes para obtener información actualizada sobre la popularidad relativa de estos resultados científicos.

En mi opinión esta respuesta de ChatGPT es muy pertinente; un buen ejemplo de la utilidad de las herramientas contemporáneas de cómputo en procesos de aprendizaje. Seguí jugando un poco más con ChatGPT y le formulé una pregunta más:

¿Tú podrías demostrar la conjetura de Poincaré?

Su respuesta, por demás previsible, fue la siguiente:

La demostración completa de la conjetura de Poincaré es un resultado muy avanzado y complejo en matemáticas. Fue resuelta por el matemático ruso Grigori Perelmán en la década de 2000 y se basa en conceptos profundos de topología y geometría diferencial, incluyendo el uso de la teoría de Ricci. La demostración original de Perelmán es extremadamente técnica y detallada.

Dado que la demostración de la conjetura de Poincaré es un tema altamente especializado y complicado, no puedo proporcionar una demostración completa aquí en un formato de respuesta. Incluso los matemáticos expertos necesitarían una comprensión profunda de las herramientas matemáticas avanzadas utilizadas en la demostración.

Si tienes un interés genuino en comprender la demostración de la conjetura de Poincaré, te recomiendo estudiar matemáticas a nivel universitario y sumergirte en la literatura matemática especializada que trata sobre este tema. Textos académicos, artículos científicos y recursos educativos avanzados son esenciales para comprender los detalles de la demostración.

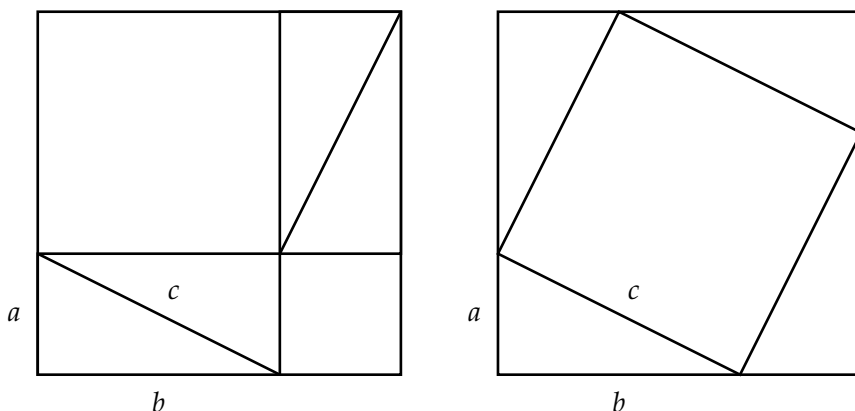
Nada mal para un programa de cómputo. El lector curioso podrá cuestionarle a ChatGPT si acaso puede demostrar el teorema de Pitágoras. Ya veremos qué nos deparan las versiones avanzadas de esta clase de herramientas computacionales en el futuro cercano.

Cerrando el paréntesis, es justo al final de la pubertad y al inicio de la adolescencia cuando se aborda la abstracción sistemática en el proceso de enseñanza de las matemáticas. La demostración de la declaración matemática que concierne al presente capítulo suele ser una de las primeras que confrontan a los adolescentes con los procesos de razonamiento hipotético-deductivo utilizados en la demostración de teoremas. Desafortunadamente, esto no siempre es exitoso, ya que la adolescencia presenta retos importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Dedicó el recuadro 25 (p. 135) a profundizar en este asunto. En aras de evitar la confrontación con la resistencia de la mente adolescente, el proceso de enseñanza de las matemáticas explora en la actualidad alternativas al uso del lenguaje escrito como vehículo de transmisión del conocimiento matemático. Una de estas alternativas concierne el uso de demostraciones *visuales de teoremas*; esto es, demostraciones sin palabras. Esta es la razón por la cual en este capítulo decidí presentar una demostración visual del teorema de Pitágoras, la cual presento a continuación.

#### DEMOSTRACIÓN

La figura 5 ofrece una demostración visual del teorema de Pitágoras, la cual se halla en el tratado matemático chino denominado *El clásico matemático de la sombra de Zhou*, que fue elaborado hacia el siglo III a.C. Dicho tratado es una recopilación de problemas anónimos realizada durante la dinastía Zhou por el duque Dan de Zhou y su astrónomo y matemático Shang Gao. □

Algunos matemáticos consideran que las demostraciones visuales —como la que acabamos de exponer— son la clase de demostraciones más elegantes; aunque en esto, como en casi todo, es cuestión de gustos y de habilidades cognitivas innatas y aprendidas. Para algunos la comprensión visual de declaraciones matemáticas es más fácil que para otros. En mi caso particular, no se me da mucho que digamos la percepción inmediata de la validez de una declaración matemática expresada en términos visuales. Mis hábitos cognitivos tienen que ver más con las palabras que con las imágenes. Además, me ha tocado conocer a matemáticos que poseen una habilidad asombrosa para la conceptualización abstracta



**Figura 5.** Demostración visual del teorema de Pitágoras

La figura de la izquierda muestra los cuadrados que corresponden a  $a^2$  y a  $b^2$ , inscritos en un cuadrado que tiene por lado  $a + b$ . La figura de la derecha muestra el mismo cuadrado de área  $(a + b)^2$ , para el cual los cuatro triángulos indicados en la figura de la izquierda han sido reubicados. Desaparece entonces el área  $a^2 + b^2$ , que pasa a ser ocupada por  $c^2$ .

mediante imágenes. Quizás la preeminencia de lo visual en la cultura contemporánea contribuya a la consolidación de un enfoque matemático centrado en las demostraciones visuales. Esto le sería benéfico sobre todo a los adolescentes, para quienes navegar la realidad a través de la percepción audiovisual está por convertirse en su segunda naturaleza. Quizás. Lo cierto es que existe una gran cantidad de declaraciones matemáticas que admiten demostraciones sin palabras, la mayoría de ellas relacionadas de una o de otra manera con lo tratado en los *Elementos* de Euclides.

En lo que sigue, respetando mis hábitos, incluyo la interpretación en palabras de la demostración visual que hemos presentado.

## EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LENGUAJE LLANO

Debido a que el teorema de Pitágoras requiere que el triángulo concernido sea un triángulo rectángulo —lo cual significa que uno de sus tres ángulos es igual a  $90^\circ$ —, la declaración podría utilizarse de hecho como definición de tal clase de polígonos en geometría plana.

**Recuadro 25.** Adolescencia y matemáticas

La exploración científica ha recabado evidencia empírica en las últimas décadas que muestra que durante la adolescencia el cerebro humano es sometido a intensos procesos de cambio, tanto estructurales como funcionales. Estos cambios potencian en el adolescente la emergencia de la capacidad cognitiva asociada a la construcción del razonamiento abstracto, así como la focalización del comportamiento en la exploración de lo afectivo. Este proceso de transformación viene aunado al desarrollo de estrategias de autodefinición personal que se manifiestan en el desafío constante a las normas sociales de contención impuestas en los entornos familiar, escolar y social. Debido a esto, la enseñanza de las matemáticas durante la adolescencia es uno de los grandes retos del sistema educativo. El proceso educativo asociado a las matemáticas requiere entonces ser adaptado convenientemente para evitar conflictos y maximizar así la capacidad de comprensión por parte del adolescente. Esto no es tarea fácil, aunque es indispensable evitar la confrontación entre el interés y la responsabilidad social del sistema de enseñanza y las motivaciones vitales que caracterizan a la adolescencia. Por ello numerosos especialistas en el proceso de enseñanza de las matemáticas defienden el uso de metodologías pedagógicas que eviten el uso normativo y excesivo del lenguaje escrito, el cual suele estar acompañado de estrategias de enseñanza coercitivas. Esto tiene lugar priorizando la transmisión de conceptos abstractos mediante la aplicación de lo visual e incentivando el trabajo en equipo de índole creativa en el aprendizaje matemático, orientándolo además a la resolución de problemas cercanos a las motivaciones del alumno, con el fin de atenuar su resistencia a la inmersión en procesos reflexivos que exigen la abstracción.

Es decir, lo anterior implica que *todos los triángulos rectángulo satisfacen el teorema de Pitágoras*.

Dado que en tiempos anteriores al desarrollo pitagórico tuvieron lugar estudios relacionados con las propiedades de triángulos rectángulos, se

**Recuadro 26.** El teorema de Pitágoras fuera de Occidente

Documentos provenientes tanto de la Antigua India como de Babilonia y del Egipto Antiguo –culturas originadas en tiempos anteriores al desarrollo pitagórico– evidencian cierto conocimiento de lo que reconocemos hoy en día como el teorema de Pitágoras. Sin embargo, no puede soslayarse la ausencia en dichos textos de la noción de demostración. Se ha conjeturado que quizás la propiedad que la declaración reconoce en los triángulos rectángulos haya sido percibida en culturas no occidentales que precedieron a la griega como resultado de su utilidad práctica en la resolución de problemas de arquitectura y de agrimensura. Como prueba de ello se cita con frecuencia la tablilla de barro babilónica Plimpton 322, encontrada en la región de Senkereh, en el sur de Irak, perteneciente a la colección G. A. Plimpton de la Universidad de Columbia, Estados Unidos. Dicha tablilla, posiblemente tallada hacia el año 1 800 a.C. (esto es, alrededor de 1 200 años antes de que Pitágoras se interesara en el teorema que lleva su nombre), lista algunos números pitagóricos. Esto es, triplete o ternas de números enteros  $a, b, c$ , tales que  $a^2 + b^2 = c^2$ . En este caso, como en otros similares, la ausencia de métodos sistemáticos de razonamiento hipotético-deductivo habría impedido la formulación de este conocimiento bajo la forma de teoremas. Una colección de ejemplos ilustrativos de la validez de un enunciado matemático no constituye una demostración.

han presentado debates entre historiadores de las matemáticas en torno a la paternidad de la declaración, para lo cual le recomiendo al lector que se dirija al recuadro 26.

En términos algebraicos, la declaración de Pitágoras se puede demostrar utilizando la imagen que se encuentra en el lado derecho de la figura 5. En efecto, puede observarse que cada uno de los cuatro triángulos indicados tiene como área:

$$\frac{a \times b}{2}.$$

En consecuencia, al sumar el área de dichos cuatro triángulos se obtiene:

$$4 \times \left( \frac{a \times b}{2} \right)$$

y al sumarle a esta cantidad el área del cuadrado de lado  $c$ :

$$4 \times \left( \frac{a \times b}{2} \right) + c^2 = 2 \times a \times b + c^2.$$

El lector notará que esta cantidad es igual al área del cuadrado en el que están incluidos los cuatro triángulos de área  $(a \times b)/2$  y el cuadrado de área  $c^2$ , esto es:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

En consecuencia:

$$2 \times a \times b + c^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

Por lo tanto, al restar de ambos lados de esta igualdad a la cantidad  $2 \times a \times b$  se tiene:

$$c^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 - 2 \times a \times b.$$

Finalmente:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

como lo asevera la declaración.

Como el lector podrá apreciar, la demostración visual es sin lugar a dudas más elegante que la demostración algebraica que viene de presentarse. No deja de impresionar el hecho de que de alguna manera la capacidad de procesar imágenes, que esencialmente todos los seres humanos poseemos, reemplaza en este caso la necesidad de realizar la demostración algebraica. ¿Cómo ocurre esto? Esta es una pregunta cuya respuesta es aún elusiva.

Debido a lo evidente que resulta la validez del teorema de Pitágoras, al observar la figura 5, uno podría argumentar que se está ante un caso obvio de *axioma visual*.

Con esto quiero decir que no todo está dicho en lo que respecta a la noción de *postulado matemático que se toma como evidentemente verdadero sin*

*necesidad de prueba*, como se ha definido previamente a lo que se reconoce en el ámbito matemático como *axioma*.

Así pues, lo evidentemente verdadero, en el sentido formal, puede también depender de los mecanismos de percepción y de reflexión utilizados en el proceso de cognición. Valdría la pena abordar este asunto desde la epistemología matemática. ¿Qué opina el lector? Hasta aquí con el teorema de Pitágoras, es tiempo de pasar a un nuevo teorema.

## Teorema 5. El cociente hipotenusa/cateto en todo triángulo rectángulo isósceles es igual a $\sqrt{2}$

He aquí la quinta declaración matemática incluida en este volumen, la cual involucra tanto a la raíz cuadrada del número entero 2 —esto es, el número irracional representado de manera simbólica como  $\sqrt{2}$ —, así como a una propiedad geométrica que caracteriza a una clase específica de polígonos en geometría euclidiana. Se trata de la clase de los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen la misma longitud: a saber, los denominados *triángulos isósceles*. Previamente se ha demostrado que la raíz cuadrada del número 2 es un número irracional. Esta propiedad significa que la raíz cuadrada del número 2 no admite una representación como cociente de dos números enteros, es decir, como una fracción. Esto se resume ahora utilizando la notación que se revisó en los “Conceptos preliminares”, simplemente escribiendo que

$$\sqrt{2} \in \mathbb{I},$$

donde la letra mayúscula  $\mathbb{I}$  representa a los números *reales* que no se pueden escribir como fracciones. Antes de abordar la demostración me parece importante dedicar algunos párrafos a los números reales. Ya en los “Conceptos preliminares” he indicado que éstos, representados mediante la letra  $\mathbb{R}$ , constituyen el conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Ha llegado el momento de ser más preciso a este respecto.

## ¿QUÉ ES UN NÚMERO REAL?

Su definición es sutil, pues proviene de un esfuerzo constructivo que requirió mucho tiempo..., siglos de hecho. Tomando la raíz cuadrada de 2 como ejemplo para ilustrar el concepto de número real, no es complicado admitir que siempre se pueden elegir dos números racionales positivos, digamos  $p$  y  $q$ , tales que uno de ellos sea más pequeño que la raíz cuadrada de 2 y el otro más grande que ésta; es decir:

$$p < \sqrt{2} < q.$$

Por ejemplo, los números racionales  $p = 1$  y  $q = \frac{3}{2} = 1.5$  satisfacen lo que viene de especificarse. En efecto:

$$1 \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Recuerde que la raíz cuadrada de 2 está dada en notación decimal por

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$$

Ahora bien, debido a que la suma de dos números racionales es también un número racional, podemos sumarle a  $p$  un número racional escogido de manera tal que el número resultante de la suma, digamos  $r$ , sea mayor que  $p$  pero todavía menor que la raíz cuadrada de 2. Tal operación puede hacerse sin problema, basta con considerar sumarle a  $p$  el número racional  $1/n$  para un valor entero positivo de  $n$  suficientemente grande. Por ejemplo, el número:

$$q = p + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

satisface:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2}.$$

De manera similar se le puede restar un número racional a  $q$  de tal modo que se obtenga un número mayor que la raíz cuadrada de 2, aunque menor que  $q$ . Por ejemplo, restándole a  $q$  el número  $\frac{1}{12}$  se tiene:

$$q - \frac{1}{12} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{18-1}{12} = \frac{17}{12} > \sqrt{2}.$$

Se tiene ahora entonces que se cumple la condición buscada:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}.$$

Podemos tomar esta última expresión como punto de partida y repetir el procedimiento previo y llegaríamos a una nueva expresión de la forma:

$$u < \sqrt{2} < v,$$

donde  $u$  y  $v$  son números racionales tales que  $u > \frac{4}{3}$  y  $v < \frac{17}{12}$ . Se puede repetir este proceso de manera indefinida, lo cual es estrictamente equivalente a afirmar que

*Existe un número racional arbitrariamente cerca de la raíz cuadrada de 2 por la izquierda (esto es más pequeño) y otro número racional arbitrariamente cerca de ésta por la derecha (es decir, más grande).*

En términos simbólicos, esto significa que, dado un número arbitrariamente pequeño  $\epsilon > 0$ , siempre existe un par de números racionales  $x$  y  $y$  tales que

$$\sqrt{2} - x < \epsilon$$

y

$$y - \sqrt{2} < \epsilon,$$

para los cuales

$$x < \sqrt{2} < y.$$

Dado lo anterior, se define a la raíz cuadrada de 2 como la entidad matemática que separa al conjunto de *todos* los números racionales en dos conjuntos: uno que integra a todos los números racionales que son estrictamente más pequeños que la raíz cuadrada de 2 y otro, complementario, que incluye a todos los números racionales que son más grandes que dicha cantidad. Se dice entonces que la raíz cuadrada de 2 corta al conjunto de los números racionales en los dos conjuntos especificados. La noción de corte utilizada provee un mecanismo conceptual para definir a los números reales. La primera definición de éstos se debe al matemático alemán Julius Wilhelm Richard Dedekind, quien definió un corte en los números racionales como un subconjunto no vacío que no coincide con el conjunto de los racionales, y tal que

- para un elemento dado del corte, también incluye a todos los números racionales que son más pequeños que éste;
- dado que el corte no coincide por definición con el conjunto de los números racionales, entonces existe al menos un número racional que no está en el corte. Esto significa que todo número racional que es mayor que dicho número tampoco está en el corte, por lo que éste se encuentra acotado por arriba y no posee elemento máximo.

Lo que acabamos de especificar se conoce en el ámbito de las matemáticas como *corte de Dedekind*. Con respecto a  $\sqrt{2}$ , el corte de Dedekind, definido mediante la partición  $(A, B)$ , donde

$$A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \text{ o } a < 0\}$$

y

$$B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 \geq 2 \text{ y } b \geq 0\},$$

proporciona un medio para definir a  $\sqrt{2}$  como un número real. Recuerde que  $\mathbb{Q}$  denota al conjunto de los números racionales. Expresado con palabras,  $A$  se define como el conjunto de los números racionales que al ser elevados al cuadrado dan como resultado un número más pequeño que el número 2 o son negativos. En cuanto al conjunto  $B$ , éste está definido como el conjunto de todos los números racionales que al ser elevados al cuadrado dan como resultado un número racional que es mayor o igual a 2 y que además son mayores o iguales a 0. El corte definido por la partición  $(A, B)$  permite que la raíz cuadrada de 2 sea representada mediante el conjunto  $A$ . Note que este conjunto no posee un elemento máximo, ya que por lo que hemos visto antes siempre se puede hallar un número racional cuyo cuadrado esté arbitrariamente cerca de 2.

Con base en la idea de corte se llega a la definición elaborada por Julius Wilhelm Richard Dedekind:

**DEFINICIÓN 15** (El conjunto de los números reales). *Es el conjunto de todos los cortes de Dedekind en  $\mathbb{Q}$ .*

Esta definición provee un mecanismo natural para asegurar que números tales como la raíz cuadrada de 2 —aun no siendo racionales, como

se ha demostrado precedentemente para este número— posean propiedades que heredan de tal conjunto. Puede sorprender que hayan pasado más de dos mil años entre el descubrimiento en la Antigua Grecia de la no pertenencia de  $\sqrt{2}$  al conjunto de los números racionales y la construcción del conjunto de los números reales en la Europa de fines del siglo XIX. Sin embargo, cuando uno piensa en el tiempo que le tomó a nuestros ancestros pasar de las herramientas manufacturadas con piedras a las manufacturadas con metales —esto es, cientos de miles de años—, uno puede concluir que, en comparación, la construcción del conocimiento matemático ha avanzado de manera relativamente rápida.

Hasta aquí con esta exploración de los fundamentos del *análisis matemático*. Es tiempo ya de emprender la demostración que concierne a este capítulo.

## $\sqrt{2}$ Y LA GEOMETRÍA

En la nueva declaración matemática que se aborda en este capítulo se manifiestan algunas de las indagaciones más significativas de los matemáticos de la Antigua Grecia, en particular la que concierne a la relación entre números irracionales y ciertas figuras geométricas, lo que los llevó a la definición de *inconmensurabilidad* como propiedad de ciertas cantidades, a lo cual dedico el recuadro 27. Como se ha afirmado previamente, la perspectiva de los matemáticos de la Antigua Grecia priorizó el estudio de lo geométrico, y en gran parte esa orientación se debió al descubrimiento de la existencia de los números irracionales. Si la inconmensurabilidad de estos números resultó sorprendente para los matemáticos pitagóricos, más aún les sorprendió descubrir que algunos de estos números aparecen como constantes que definen *propiedades de clases de objetos geométricos*. Este fue, pues, un descubrimiento trascendente.

Entonces, reiterando la pregunta implícita en la declaración matemática que intitula a este capítulo: *¿qué es la raíz cuadrada del número entero 2?* Se le pueden dar entonces al menos dos respuestas:

PRIMERA RESPUESTA: La raíz cuadrada de 2 es un número que al ser multiplicado por sí mismo da como producto el número 2. Además, dicho

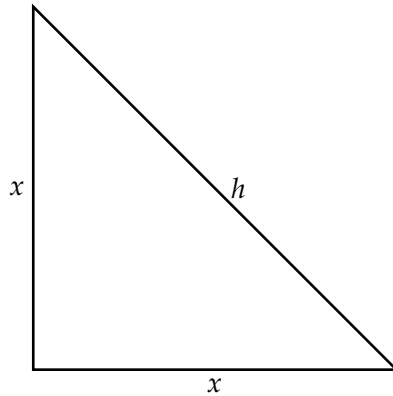
**Recuadro 27.** Cantidades inconmensurables

En matemáticas se dice que dos cantidades dadas de la misma naturaleza (dos longitudes, dos áreas, dos volúmenes, dos porcentajes, por ejemplo) distintas de cero, digamos  $a$  y  $b$ , son conmensurables si y solamente si existe una unidad  $u$  de estas cantidades de las cuales  $a$  y  $b$  son múltiplos; a saber: tales que existe un par de enteros  $m$  y  $n$  para los cuales  $a = m \times u$  y  $b = n \times u$ . En caso de que esto no sea cierto se dice que esas cantidades son inconmensurables. Por ello se considera que la noción de cantidad conmensurable es estrictamente equivalente a la de número racional. Esto implica que al hablar de una cantidad inconmensurable se está hablando de un número que la representa que ya no es conmensurable; es decir, es un número irracional. También se dice que dos cantidades dadas son conmensurables si se las puede comparar, lo cual significa que cantidades que se representen mediante números irracionales no se pueden comparar, salvo si ambas cantidades son de hecho la misma cantidad.

número es un número real (por ello, un corte de Dedekind) irracional; es decir,  $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ . Con respecto al conjunto  $A$  que se ha definido previamente al introducir el corte de Dedekind asociado, esto es,  $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \text{ o } a < 0\}$ , se dice que la raíz cuadrada de 2 es el *supremo* de este conjunto. Este concepto se utiliza para definir al número más pequeño que es más grande que todos los elementos incluidos en el conjunto. En este caso, el supremo de  $A$  no está incluido en  $A$ , ya que se trata de la raíz cuadrada de 2, que, como se ha demostrado, no es un número racional.

**SEGUNDA RESPUESTA:** La raíz cuadrada de 2 es igual al cociente hipotenusa/cateto de *todo* triángulo rectángulo isósceles.

La primera respuesta es básicamente la definición de lo que es la raíz cuadrada de 2. La segunda respuesta es más interesante que la primera, pues despierta en la mente el interés en la potencial asociación entre la inconmensurabilidad y la caracterización de clases de objetos matemáticos, en



**Figura 6.** Triángulo rectángulo isósceles

La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles; esto es, sus catetos tienen la misma longitud, denotada simbólicamente mediante  $x$ . La hipotenusa del triángulo se denota simbólicamente como  $h$ .

este caso los triángulos rectángulos isósceles. En otras palabras, la raíz cuadrada del número 2 es una puerta de entrada a un territorio abstracto poblado de familias de objetos geométricos cuyas propiedades –las cuales van más allá del concepto de cantidad– están estrechamente asociadas a los números irracionales.

Paso ahora a la demostración, que, como se verá, se sirve del teorema de Pitágoras.

#### DEMOSTRACIÓN

Tomando como punto de partida el teorema de Pitágoras previamente demostrado de manera visual, aplicado ahora al triángulo rectángulo isósceles que se muestra en la figura 6, se tiene que la suma del cuadrado de los catetos, en este caso de longitud idéntica, está dada por la siguiente igualdad:

$$x^2 + x^2 = h^2,$$

donde  $x$  denota simbólicamente la longitud de cada uno de los catetos y  $h$  denota la longitud de la hipotenusa. Esto lleva en consecuencia a la igualdad dada por

$$2 \times x^2 = h^2.$$

Dividiendo ahora ambos lados de esta igualdad por el término  $x^2$ :

$$\frac{2 \times x^2}{x^2} = \frac{h^2}{x^2}$$

o lo que es lo mismo:

$$2 = \frac{h^2}{x^2}.$$

Entonces, sacando la raíz cuadrada de ambos lados de la igualdad se llega a la igualdad siguiente:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{h^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{x^2}}.$$

Dado que la raíz cuadrada del cuadrado de un cierto número es precisamente dicho número, se tiene en consecuencia que

$$\sqrt{2} = \frac{h}{x},$$

lo cual finaliza la demostración. □

Este resultado es muy interesante, ya que demuestra la existencia de una constante, en este caso un número irracional, como propiedad fundamental de *todos los triángulos isósceles*.

Se podría entonces decir que, en cierto sentido, la raíz cuadrada de 2 representa a los triángulos isósceles ante la sociedad de los objetos matemáticos, es su *carta de presentación*.

La demostración que se ha presentado llevó a los matemáticos de la Antigua Grecia a explorar la existencia de esta clase de constantes asociadas a otras figuras geométricas y lo que hallaron sigue asombrándonos hasta el día de hoy.<sup>16</sup> En efecto, la más famosa de estas constantes es, sin lugar a dudas, el número que se representa mediante la letra griega  $\pi$  ( $pi$ ), que es el cociente de la circunferencia de cualquier círculo dividida por su diámetro; es decir:

$$\pi := \frac{\text{Circunferencia de un círculo dado}}{\text{Diámetro de dicho círculo}}.$$

<sup>16</sup> Además de actuar como puente de conexión entre dos intervalos de números racionales —en el sentido postulado por Julius Wilhelm Richard Dedekind—, el que un número irracional caracterice a una familia de objetos geométricos, tal y como acontece con  $\sqrt{2}$ , lleva necesariamente a preguntarse si éste no es el caso para todos los números irracionales.

**Recuadro 28.  $\pi$** 

La historia de la constante matemática *pi*, representada mediante la letra griega  $\pi$ , es muy interesante. Aparece en métodos numéricos que se desarrollaron en Babilonia y en Egipto en el contexto del cálculo del área del círculo, mucho tiempo antes de que los matemáticos de la Antigua Grecia se interesaran en ella. En el famoso papiro Rhind (elaborado hacia el año 1550 a.C.) –cuya mayor parte se encuentra en el Museo Británico en Londres, Inglaterra, institución que lo adquirió de la colección del anticuario escocés Alexander Henry Rhind (1833-1863) en 1865 tras el fallecimiento de él, quien a su vez lo había comprado en Luxor, Egipto, en 1858– se provee una fórmula para el cálculo del área de un círculo, la cual da un valor aproximado para  $\pi$  de 3.1605. Se considera que la primera demostración para su cómputo se debe a Arquímedes y está incluida en su tratado *Sobre la medida del círculo*. El método de cómputo se basa en la aplicación del teorema de Pitágoras y en la inserción de polígonos regulares en el círculo, mediante lo cual se obtiene un valor que se halla entre 3 enteros  $\frac{1}{7}$  y 3 enteros  $\frac{10}{71}$ , lo cual se escribe como  $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ . El uso del símbolo  $\pi$  para representar este número fue introducido por el matemático inglés William Oughtred (1574-1660) en el siglo XVII. Fue Johann Heinrich Lambert (1728-1777), quien demostró en el siglo XVIII que el número  $\pi$  es un número irracional, lo cual comparte con el número  $\sqrt{2}$ .

El recuadro 28 está dedicado a esta constante, la cual sigue intrigando y fascinando hoy en día a mucha gente.

Para los matemáticos de la Antigua Grecia el número  $\pi$  fue muy atractivo como constante, debido a que en cierto sentido caracteriza al círculo, forma que consideraron como perfecta. El lector curioso podrá dedicar algunas horas a la lectura de la conocida novela *El péndulo de Foucault*, obra en la cual el pensador italiano Umberto Eco (1932-2016) se sirve en la trama, articulada en torno a una crítica satírica al pensamiento esotérico, tanto del círculo como de  $\pi$ . En lo que sigue me serviré de esa celebre

constante para abordar la relación que algunas personas creen percibir entre las matemáticas, lo bello y lo místico. Esto como un complemento a lo que he expuesto hasta ahora.

## BELLEZA Y MISTICISMO

En el año 2015 el famoso matemático estadounidense Steven Strogatz (nacido en 1959), publicó el texto “¿Por qué Pi Importa?” (en inglés, “Why Pi Matters”), en la revista *The New Yorker*, el 13 de marzo de 2015,<sup>17</sup> en el cual de manera poética afirma que *“La belleza de pi se debe en parte a que pone a nuestro alcance el infinito”*.

Con su frase nos indica que los dígitos de pi, cuando se expresan en notación posicional decimal, siguen y siguen sin que nunca muestren un patrón; a saber:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 ...

Al menos no lo presentan hasta ahora para los dígitos que han sido determinados. También Steven Strogatz escribe que los dígitos siguen por siempre, apareciendo uno tras del otro de manera aparentemente aleatoria, aunque agrega: *“...excepto que esto no es posible, porque encarnan el orden inherente a un círculo perfecto”*. Esta frase de Steven Strogatz muestra lo difícil que es aceptar, incluso para mentes privilegiadas como la suya, que el azar y el orden puedan convivir sin conflicto. ¿Por qué no puede reinar lo aleatorio en los dígitos decimales que sustancian al número *pi*, por más que este número defina la esencia perfecta de los círculos? Negar esto de entrada tiene algo de soberbio. ¿No es cierto?

Steven Strogatz menciona en su texto uno de los métodos conocidos para computar el valor de pi, que consiste en multiplicar por 4 el resultado de la serie infinita:

<sup>17</sup> En algunas universidades estadounidenses, entre ellas el mundialmente famoso Instituto Tecnológico de Massachusetts, se festeja el 14 de marzo el día de pi, puesto que se representa dicho número de manera aproximada como 3.14 en notación decimal. El festejo suele incluir el consumo de un *pay*, que en inglés se pronuncia exactamente como el número pi. Además, el escrito de Steven Strogatz se justificaba porque el 14 de marzo de 2015 se puede escribir como 3.1415, es decir, con dos dígitos más. Para él y para los enamorados de este número el 14 de marzo del año 2015 fue un día muy especial.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots,$$

en la que intervienen todos los números impares. De manera compacta, el valor de pi utilizando este método está dado por

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta fórmula se le debe al coinventor del cálculo, Gottfried Wilhelm Leibniz, quien la publicó en 1676. El descubrimiento de métodos como éste no deja de ser impresionante, y eso explica el porqué del atractivo que números como pi tienen para muchos individuos, más allá del universo de los matemáticos profesionales.

El enamoramiento de muchos por pi llevó al cineasta estadounidense Darren Aronofsky a dirigir su película *Pi* en 1998, un *thriller* de ciencia ficción en el que los dígitos del número poseen información importante. En el epílogo de la novela *Contacto* (Plaza & Janés, 1985) del conocido planetólogo estadounidense y divulgador de la ciencia Carl Sagan, llevada al cine en 1997 por Robert Zemeckis, la protagonista busca en los dígitos de pi mensajes ocultos, lo que la lleva a explorar otros números irracionales significativos.

Como puede uno darse cuenta, la tentación del misticismo nunca está muy lejos cuando de números misteriosos se trata. Este fenómeno social tiene mucho que ver con cuestionamientos recurrentes en torno a la relación entre las entidades matemáticas y la realidad. La pregunta subyacente es ésta: *¿son reales las entidades matemáticas?*

La respuesta a esta pregunta no goza ni ha gozado de unanimidad incluso entre los matemáticos profesionales, tal como lo expongo en el recuadro 29. La tentación mística se presenta cuando se entrecruza el deseo de que exista algo más allá de la realidad tangible con el misterioso universo de las entidades matemáticas. Para algunos es a través de conocimientos de índole matemática como se abre la puerta de acceso a ese más allá. Eso explica el secretismo que en su tiempo caracterizó a la escuela de Pitágoras y que todavía hoy en día influye en ciertas corrientes del pensamiento pseudo-científico, que propugnan el uso de la

**Recuadro 29.** Realismo matemático

Existen dos visiones diferentes y encontradas en torno a la relación de las entidades matemáticas y la realidad (comprendida en el sentido ontológico como lo que existe independientemente del pensamiento y de la percepción): el realismo matemático y el anti-realismo matemático. Para el realismo matemático la existencia de los objetos matemáticos es independiente y previa al conocimiento que tenemos de ellos. Esto es, los objetos matemáticos son reales. En tal sentido el matemático no inventa sino que descubre. Para la visión antirrealista las teorías matemáticas no poseen una ontología, esto es, no proporcionan descripciones verdaderas de ninguna parte del mundo. Estas dos visiones no poseen corrientes únicas del pensamiento. Algunos partidarios del realismo matemático se inscriben en una perspectiva de corte platónico y defienden la existencia de una realidad de las abstracciones y de los conceptos. Una de las corrientes del pensamiento antirrealista tiene su origen en el tratamiento filosófico del filósofo austriaco Ludwig Josef Johann Wittgenstein, quien sostuvo en su famosa obra *Tractatus Logico-Philosophicus* que las proposiciones matemáticas no están asociadas a la realidad (como lo estarían las declaraciones de la física) y que la verdad matemática es de naturaleza no referencial y puramente sintáctica. Desde esta perspectiva el conocimiento matemático resulta ser un invento en el que la ruta del razonamiento seguido al construir una demostración no le es preexistente. Se suele afirmar que la mayoría de los matemáticos aceptan el realismo matemático, aunque no existen evidencias empíricas de ello que sean accesibles. Sin duda esta temática puede ser de gran interés para los sociólogos de la ciencia.

numerología<sup>18</sup> como un supuesto medio para predecir el futuro. No deja de sorprender que numerosas personas, incluyendo entre ellas a muchas

<sup>18</sup> Se dice que una creencia está inscrita en la numerología cuando asocia una relación mística entre un cierto número y algunos eventos coincidentes.

```

      3.1415926535897932384626433832
    7950288419716939937510582097494459
  23078164062862089986280348253421170
67982148086513282306647093844609550
5822      31      72
535      94      08
1 2      84      81
1 1      74      50
28      41      02
      701      93
      852      110
      555      964
      462      294
      895      493
      038      1964
      4288      1097
      5665      9334
      4612      8475
      6482      33786
      7831      65271
      20190      91456
      48566      92346
      03486      104543
      26648      213393
      6072      60249
      141      27

```

**Figura 7.** 300 dígitos de  $\pi$

Esta figura concierne la representación del número  $\pi$  en base 10 y muestra los primeros 300 dígitos. Se basa en una elaborada por el usuario *Mutaz* del servicio localizado en <https://tex.stackexchange.com/questions/545570/coloring-the-digits-of-pi>.

que han recibido educación superior, padezcan hoy en día del disenso cognitivo que los lleva a buscar las pistas del futuro en los números. La magia nunca está demasiado lejos de la vida cotidiana.

Finalizo este capítulo con la ilustración mostrada en la figura 7, que provee un ejemplo de la clase de estímulos creativos que acompañan a los números irracionales.



## Teorema 6. La media geométrica de dos números positivos es menor o igual a su media aritmética

Promediar dos cantidades dadas es una práctica intuitiva que indudablemente pertenece al sentido de los números que, en general, todos traemos como parte de nuestro bagaje cognitivo. La declaración matemática que atañe al presente capítulo está asociada justamente con el concepto de la promediación. Al representar las dos cantidades referidas por medio de números, ¿qué significa promediarlos? Antes de abordar esta cuestión es importante puntualizar que existe más de una manera de promediar cantidades o los números correspondientes que los representan. Para clarificar este asunto, considere un par de números reales positivos dados y representados simbólicamente mediante las letras minúsculas itálicas  $a$  y  $b$ , por lo cual el par se representa como  $(a, b)$ . Entonces, su *media geométrica* está definida como la raíz cuadrada de su producto, lo que expresamos así:

$$\text{Media geométrica de } (a, b) := \sqrt{a \times b}.$$

Para facilitar la comprensión de este concepto considere el ejemplo siguiente:

**EJEMPLO 6.** Sean los dos números positivos  $a = 2$  y  $b = 8$ . La media geométrica de estos dos números está entonces dada por

$$\text{Media geométrica de } (2, 8) = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4.$$

Esto significa que el número 4 representa a 2 y a 8 en términos de la media geométrica que les corresponde. En este caso también se puede decir que el número 4 es el promedio geométrico de los números 2 y 8. ■

Además de la media geométrica de un par de números (o de un conjunto de ellos, como se verá más tarde), también existe la así denominada *media aritmética*. Esta está dada por lo que resulta cuando los dos números que nos interesan, es decir,  $a$  y  $b$ , son sumados y el resultado de la suma se divide entonces entre dos; a saber:

$$\text{Media aritmética de } (a, b) := \frac{a + b}{2}.$$

Esto es justamente lo que se suele reconocer popularmente como el promedio de los números  $a$  y  $b$ . Ejemplificando con los números especificados precedentemente:

EJEMPLO 7. Para el caso  $a = 2$  y  $b = 8$  se tiene que

$$\text{Media aritmética de } (2, 8) = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Así pues, el número 5 es el promedio aritmético de los números 2 y 8. ■

Una vez introducidos los conceptos de media geométrica y de media aritmética, es natural formular el cuestionamiento siguiente: *¿qué relación guarda la media geométrica con la media aritmética?*

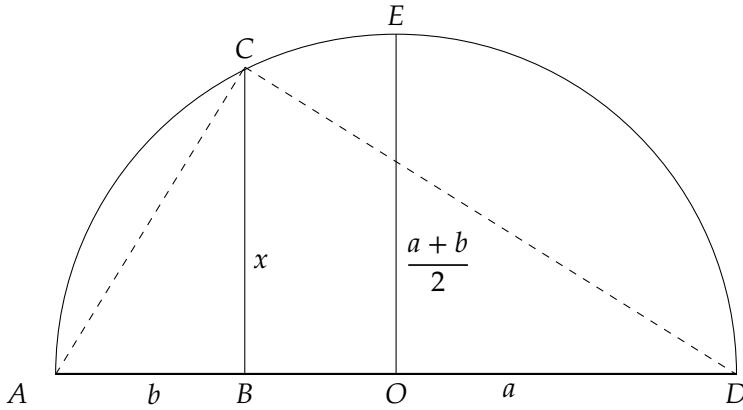
Como puede verse, para los dos números considerados en los ejemplos precedentes, esto es,  $a = 2$  y  $b = 8$ , se tiene que se pueden representar por medio de sus promedios geométrico y aritmético. Además, se advierte que la media aritmética, esto es, 5, es mayor que la media geométrica correspondiente, es decir, 4. ¿Es posible generalizar esta constatación a cualesquiera dos números positivos? Es justamente la respuesta a esta pregunta lo que atañe a este capítulo.

La declaración matemática que se demostrará en este capítulo da respuesta positiva al cuestionamiento precedente al establecer que la desigualdad siguiente es satisfecha, esto es la declaración afirma que para todo par de números positivos  $(2, 8)$  es cierto que

$$\text{Media geométrica de } (a, b) \leq \text{Media aritmética de } (a, b);$$

es decir:

$$\sqrt{a \times b} \leq \frac{a + b}{2}.$$



**Figura 8.** Media geométrica

La figura proporciona la demostración visual de la desigualdad  $\sqrt{a \times b} \leq (a + b)/2$ . El diámetro del semicírculo es igual a  $\overline{AD} = a + b$  y su radio está dado entonces por  $(a + b)/2$ . Puede notarse que el triángulo  $\triangle ACD$  es un triángulo rectángulo, lo cual se desprende como consecuencia directa del teorema de Tales. Note que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle CBD$  son tales que  $x/b = a/x$ , lo cual significa que  $x = \sqrt{a \times b}$ , esto es, la media geométrica de  $a$  y de  $b$ .

El símbolo  $\leq$  en esta expresión significa que la cantidad indicada a la izquierda es *menor o igual que* la cantidad indicada a la derecha. Como se verá, esta declaración matemática es muy fácil de demostrar de manera directa vía un elegante argumento de índole puramente geométrica, siguiendo para ello el razonamiento deductivo formal inventado por los matemáticos de la Antigua Grecia.

La demostración que se presentará más adelante involucra la participación de una declaración matemática famosa a la que se conoce como el *teorema de Tales*, a saber:

*Todo triángulo inscrito en un círculo y que tiene como uno de sus lados al diámetro de dicho círculo es un triángulo rectángulo, esto es, uno de sus ángulos es igual a  $90^\circ$ .*

Esta célebre declaración matemática corresponde a la proposición 31 del libro III de los *Elementos* de Euclides. Suele atribuírsele a Tales, considerado por muchos estudiosos como el primer matemático, quien la habría

demostrado en el sentido que concierne al presente capítulo, aunque también se ha atribuido a Pitágoras. Históricamente, esta declaración matemática es la primera que se atribuye a un individuo específico. Debido a que proporciona un medio para construir triángulos rectángulo, algunos consideran que se utilizó con fines arquitectónicos en el Egipto Antiguo,<sup>19</sup> donde Tales habría observado su uso práctico durante los años que vivió allí, entre los siglos VII y VI antes de nuestra era. Junto con el teorema de Pitágoras, el de Tales es uno de los enunciados matemáticos incluidos en la enseñanza de las matemáticas a los alumnos que se hallan en la última fase de la educación media (esto es, la escuela secundaria).

Procedo ahora con la demostración que concierne a este capítulo.

#### DEMOSTRACIÓN

Considere la figura 8, la cual muestra un triángulo inscrito en una semicircunferencia de diámetro:

$$\overline{AD} = a + b.$$

Como puede verse, el desplazamiento del punto  $C$  a lo largo del arco que delimita la semicircunferencia modifica el valor de la longitud de la línea recta que une al punto  $B$  con el punto  $C$ , cuya longitud es denotada simbólicamente como  $x$  y la cual es perpendicular a la línea recta que une a  $A$  con  $B$ . Note que esta longitud corresponde a la altura de un triángulo rectángulo, sin importar donde esté colocado  $C$  en el arco de la semicircunferencia. Esto es resultado directo de la aplicación del teorema de Tales. Como se hace notar en el texto de la leyenda de la figura:

$$x = \sqrt{a \times b},$$

es decir,  $x$  corresponde a la media geométrica del par  $(a, b)$ , lo cual implica que a lo más  $x$  puede igualar a la media aritmética del par  $(a, b)$  dada por  $(a + b) / 2$ , cuando el punto  $C$  coincide con el punto  $E$ ,

<sup>19</sup> Uno puede imaginarse fácilmente su uso en el proceso de construcción de edificios de base cuadrada, por ejemplo, tales como la celebre Pirámide de Guiza (también denominada Pirámide de Keops, en nombre del faraón egipcio que ordenó su construcción, a cargo del arquitecto Hemiunu). Seguramente Tales se asombró al contemplar dicho monumento funerario construido hacia el siglo xxvi antes de nuestra era.

caso en el cual se tendría que  $a$  y  $b$  son iguales. Esto finaliza la demostración.  $\square$

Como puede verse con la demostración precedente, simple y elegante, la geometrización de las relaciones que se dan entre cantidades facilita la construcción de argumentos racionales. Para completar la exposición en curso incluyo a continuación lo que corresponde a la relación que guardan entre sí las medias aritmética y geométrica, haciendo intervenir a la así denominada *media armónica* y aprovecharé para mostrar posteriormente cómo los matemáticos de la Antigua Grecia se sirvieron de estos conceptos matemáticos para dar inicio a la teoría musical en Occidente y con ello enriquecer su experiencia del sonido.

## LA MEDIA ARMÓNICA

La media geométrica y la media aritmética se relacionan, para el caso en que los números  $a$  y  $b$  son estrictamente positivos, mediante lo que se denomina como media armónica, que se define como

$$\text{Media armónica de } (a, b) := 2 \times \frac{a \times b}{a + b}.$$

EJEMPLO 8. En el caso  $a = 2$  y  $b = 8$ , se tiene que la media armónica está dada por

$$\text{Media armónica de } (2, 8) = 2 \times \frac{2 \times 8}{2 + 8} = 2 \times \frac{16}{10} = \frac{32}{10},$$

esto es, 3.2 en notación decimal.  $\blacksquare$

Representando simbólicamente a las medias como

$M_A$  : Media aritmética de  $(a, b)$ ;

$M_G$  : Media geométrica de  $(a, b)$ ;

$M_H$  : Media armónica de  $(a, b)$ ;

se puede demostrar que

$$M_H = M_G \times \left( \frac{M_G}{M_A} \right).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 M_G \times \left( \frac{M_G}{M_A} \right) &= \sqrt{a \times b} \times \left( \frac{\sqrt{a \times b}}{(a+b)/2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{a \times b} \times \sqrt{a \times b}}{\frac{a+b}{2}} \\
 &= 2 \times \frac{a \times b}{a+b} =: M_H.
 \end{aligned}$$

Note que de esta expresión se sigue que

$$M_G = \sqrt{M_A \times M_H},$$

siempre y cuando  $a$  y  $b$  sean estrictamente positivos.

EJEMPLO 9. Para el caso  $a = 2$  y  $b = 8$  se tiene que

$$M_A = 5, \quad M_H = \frac{32}{10}$$

y en consecuencia:

$$\sqrt{M_A \times M_H} = \sqrt{5 \times \frac{32}{10}} = \sqrt{5 \times \frac{32}{5 \times 2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4,$$

que corresponde a la media geométrica, tal y como ya se había determinado precedentemente. ■

Se puede demostrar además mediante métodos geométricos que para  $a$  y  $b$  estrictamente positivos se satisface la expresión siguiente:

$$M_H \leq M_G \leq M_A.$$

Dejaré que el lector se divierta demostrando esta desigualdad. En palabras se dice entonces que la media geométrica está acotada:

- por arriba por la media aritmética y
- por abajo por la media armónica.

Considerando los valores de  $a$  y de  $b$  que se han utilizado en los ejemplos precedentes:

EJEMPLO 10. Para el caso  $a = 2$  y  $b = 8$  se tiene  $M_H = 3.2$ ,  $M_G = 4$  y  $M_A = 4$ , por lo que se satisface efectivamente que

$$3.2 < 4 < 5. \quad \blacksquare$$

El lector notará que para el caso en el que  $a$  y  $b$ , positivos, son iguales las tres medias coinciden.

Conviene aquí formular el cuestionamiento siguiente: ¿qué pasa cuando se tienen más de dos números positivos?

La declaración matemática que viene de demostrarse se puede generalizar para más de dos números positivos; esto es, para un conjunto de  $n$  números reales positivos:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}.$$

La media aritmética está entonces dada por

$$\text{Media aritmética de } (x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

y la media geométrica es igual a

$$\text{Media geométrica de } (x_1, x_2, \dots, x_n) := \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

donde

- la cantidad  $\prod_{i=1}^n x_i$  denota el producto  $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times \dots \times x_n$ ;
- la cantidad  $\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$  denota la  $n$ -ésima<sup>20</sup> raíz de  $\prod_{i=1}^n x_i$ ; esta cantidad también se puede representar como  $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ ;
- la cantidad  $\sum_{i=1}^n x_i$  representa como antes la suma de los números  $x_i$ , con  $i$  tomando valores desde 1 hasta  $n$ .

<sup>20</sup> La  $n$ -ésima raíz de un número positivo, digamos  $x$ , denotada  $\sqrt[n]{x}$  es un número, digamos  $y$ , tal que  $y^n = x$ . Por ejemplo, la raíz cúbica del número  $x$ , denotada  $\sqrt[3]{x}$  satisface  $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} = x$ .

Así, se satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned} &\text{Media geométrica de } (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\leq \text{Media aritmética de } (x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

y para números estrictamente positivos se puede demostrar –lo cual no se hará aquí– que

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

donde el término de la izquierda corresponde a

$$\text{Media armónica de } (x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Note que la exigencia de que los números sean estrictamente positivos se establece para evitar divisiones por cero.

Tanto la media aritmética, como la media geométrica y la media armónica se utilizan en la práctica para computar un número que represente en un sentido bien definido todos los números de un conjunto numérico determinado. La media aritmética es en ese sentido la más intuitiva; por ejemplo, cuando se usa para cuantificar la estatura promedio o el peso promedio de un grupo de personas. Tiene entonces un significado estadístico muy claro. En cuanto a la media geométrica, es menos intuitiva en términos estadísticos, aunque tiene algunas ventajas con respecto a la media aritmética cuando se aplica para computar un número representativo de un conjunto de cantidades dadas, todas positivas. A diferencia de la media aritmética, la media geométrica es menos sensible a los valores extremos en el conjunto, aunque una de sus desventajas radica en que si una de las cantidades del conjunto es muy pequeña, la media geométrica será muy pequeña, y en el caso en el que una de las cantidades sea nula, la media geométrica será entonces igual a cero, lo cual no ocurre con la media aritmética. En cuanto a la media armónica, ésta (restringida a números estrictamente positivos) usualmente se emplea para computar

un número que representa el promedio de un conjunto de cantidades, cada una de ellas representando el cociente de dos cantidades con unidades distintas (velocidades medidas como cocientes de distancias recorridas sobre los intervalos de tiempo asociados, por ejemplo).

En términos de su utilidad, las medias aritmética, geométrica y armónica fueron utilizadas en la Antigua Grecia en el contexto del estudio de la música desde el enfoque matemático. A continuación, trato este asunto como complemento a lo que he expuesto hasta ahora. Por medio del complemento musical ilustraré cómo los pensadores de la Antigua Grecia se sirvieron de sus indagaciones matemáticas para enriquecer su experiencia de la apreciación del sonido en el contexto de la música, y con ello dar origen a una manera de sistematizar la creación musical, iniciando una de las tradiciones artísticas más antiguas en Occidente, la que atañe la vinculación entre el conocimiento matemático y la composición musical. Espero que el lector disfrute la exposición que viene a continuación.

## LAS MEDIAS PITAGÓRICAS Y LA MÚSICA

A las tres medias que vienen de ser presentadas, esto es:

- la media aritmética,
- la media geométrica y
- la media armónica,

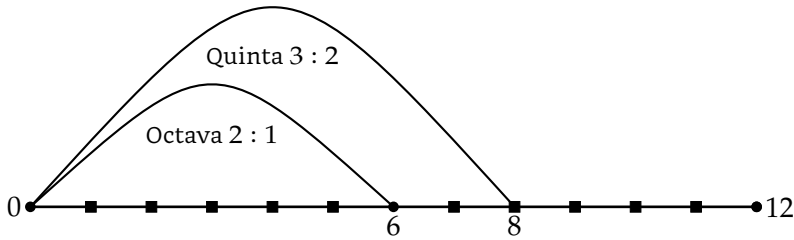
se las denomina en la literatura matemática las *medias pitagóricas* y –como puede deducirse de su nombre– fueron estudiadas en la Antigua Grecia. Esto tuvo lugar en tiempos de Pitágoras en el siglo VI antes de nuestra era mediante el uso de proporciones, esto es, relaciones de igualdad entre cocientes de dos cantidades dadas. El estudio pitagórico de las medias se dio tanto en el contexto de la exploración de los objetos geométricos como en el de la validación racional del placer que se obtiene en la escucha musical. En ambos casos, la perspectiva pitagórica se sirvió de las medias para asociar la abstracción matemática con la percepción. Me permito ilustrar esto a continuación mediante la revisión del concepto de la *quinta perfecta* (o *quinta justa*), que denota uno de los intervalos musicales que

**Recuadro 30.** Percepción y propiedades de la música

En el contexto de la música occidental institucionalizada se reconocen cuatro propiedades de los sonidos: la *altura*, la *duración*, el *volumen* y el *timbre*. La altura corresponde a una propiedad perceptual que permite el ordenamiento del sonido en una escala frecuencial y con ello la calificación de un sonido dado como alto o bajo. Se dice que un sonido dado es más alto que otro si la señal acústica correspondiente posee mayor frecuencia. La duración se refiere al tiempo en que se mantienen las vibraciones del sonido. El volumen es una medida puramente subjetiva de la presión del sonido y permite utilizar una escala que cuantifica el sonido de tranquilo a ensordecedor. El concepto perceptual de volumen difiere de la noción, propia del contexto de la ciencia física, de intensidad del sonido, la cual cuantifica la potencia acústica transportada por las ondas sonoras por unidad de superficie medida perpendicularmente a la dirección de transferencia. La potencia, por su parte, corresponde a la energía transmitida a lo largo del tiempo. En cuanto al timbre, es la propiedad perceptual del sonido que permite identificar el instrumento musical que lo produce. Estas cuatro propiedades (la altura, la duración, el volumen y el timbre) están asociadas a propiedades físicas de las ondas acústicas, aunque definidas en términos perceptuales, lo cual implica la inclusión de criterios subjetivos. La música es uno de los territorios privilegiados donde la subjetividad de la percepción (propia de la experiencia humana de las piezas concebidas por las artes) y la objetividad de la ciencia, en particular la física y las matemáticas, interactúan de manera simbiótica.

separan a un determinado par de alturas. En el recuadro 30 incluyo de manera sucinta los conceptos básicos de la música desde la perspectiva occidental, haciendo hincapié en la relación que existe entre los conceptos occidentales asociados a la música y la percepción.

Conviene mencionar que, dados dos cocientes, esto es, dos números racionales o dos fracciones –por ejemplo  $a/b$  y  $c/d$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , son



**Figura 9.** La quinta perfecta y el monocordio

La línea horizontal representa la cuerda del monocordio, fija en sus extremos, dividida en 12 tramos idénticos. Si se hace vibrar la cuerda, la frecuencia del sonido resultante es la *frecuencia base del monocordio*, esto es  $f$ . Si se fija la cuerda justo por el medio, y se hace vibrar al segmento que va de 0 a 6, el sonido tendrá una frecuencia igual a  $2 \times f$ . Entonces se dice que la nota resultante se halla a una octava de la frecuencia de base. De manera similar si se fija la cuerda en el punto que se encuentra a  $2/3$  de su longitud (esto es, en el punto 8), el segmento resultante vibrará a una frecuencia igual  $(3/2) \times f$ . Esta nota (es decir, esta frecuencia) está entonces una quinta por encima de la nota correspondiente a la frecuencia  $f$ .

números enteros positivos—, la noción de proporción se utiliza para decir que ambos cocientes son iguales, esto es:

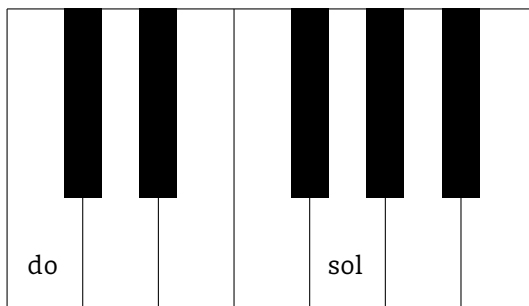
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

lo cual también se denota como

$$a : b = c : d.$$

Tomando entonces en cuenta lo que expongo en el recuadro 31, dedicado a la perspectiva geométrica de la música en la Antigua Grecia, la consonante musical a la que se denomina quinta corresponde a un cociente de frecuencias de  $3 : 2$  y consiste en un intervalo entre dos notas separadas por cinco grados. ¿Cómo se llega a este cociente? Se calcula mediante una media aritmética. El procedimiento para hacerlo es el siguiente (véase la figura 9):

- se divide la cuerda del monocordio en 12 partes iguales;
- se toma la octava como el cociente  $12 : 6$ ;



**Figura 10.** Separación entre *do* y *sol* en el piano

Esta figura representa la cuarta octava completa en el teclado del piano que contiene a la nota *sol*, que se encuentra a una quinta por encima de la nota *do* central.

- se toma la quinta perfecta como la media aritmética de 12 y 6, esto es:

$$\frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

De esta manera se obtiene el cociente  $9 : 6$ , que puede reducirse entonces a  $3 : 2$ , dividiendo cada lado de la proporción entre 3.

Para dos notas dadas cuyas frecuencias,  $f_1$  y  $f_2$ , satisfacen:

$$f_2 > f_1,$$

es decir,  $f_2$  es estrictamente mayor que  $f_1$ , se dice que la frecuencia  $f_2$  está una quinta por arriba de  $f_1$  si

$$f_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \times f_1.$$

Esto es:

$$f_2 : f_1 = 3 : 2.$$

Ilustro a continuación estas ideas mediante un ejemplo.

**EJEMPLO 11.** Sea  $f_1 = 261 \text{ Hz}$ , esto es, 261 ciclos por segundo, la frecuencia de la nota *do* en la notación latina en la así denominada escala tonal de *do mayor*. Esta nota corresponde al *do* central del teclado del piano, como se muestra en la

**Recuadro 31.** Geometría y música en la Antigua Grecia

Los números irracionales tuvieron un papel central para los matemáticos de la Antigua Grecia al explorar la relación entre conceptos matemáticos, naturaleza y pensamiento. Siendo la percepción el proceso esencial a través del cual la mente humana obtiene información de su entorno físico, pensadores tales como Pitágoras, Euclides, Platón y Aristóteles, para nombrar a los principales, se sirvieron de conceptos matemáticos para construir interpretaciones teóricas que ligaban el pensamiento con la percepción. Uno de los aspectos que más les interesó fue el de la música: *la organización sensible y coherente de combinaciones de sonidos y silencios*. Los pitagóricos, explorando con el monocordio, una cuerda atada a un puente móvil que permitía cambiar la frecuencia de vibración –es decir, el tono–, inventaron intervalos musicales que se pueden expresar mediante cocientes de los primeros cuatro números enteros: 1, 2, 3, 4. Las consonantes más importantes en la música griega antigua (esto es, las combinaciones de sonidos que les fueron placenteros), la octava, la quinta y la cuarta se producen a partir de las proporciones  $2 : 1$ ,  $3 : 2$  y  $4 : 3$ , respectivamente. En lo que respecta al monocordio, se divide la longitud de la cuerda a la mitad y el tramo que se hace vibrar lo hace ahora al doble de frecuencia que la cuerda no dividida, esto es lo que significa la proporción  $2 : 1$  (la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda), que en la música occidental se divide luego en ocho grados. Tomando relaciones entre sonidos y cocientes numéricos, utilizados para describir tales sonidos, se sentaron en la Antigua Grecia las bases de una teoría musical sobre la cual se construyó el canon musical tonal, que se estandarizó en Europa hacia 1600 con el desarrollo de la música barroca, y esto incluyó la introducción de métodos algorítmicos de composición, lo cual alcanzaría su cumbre con el *Arte de la Fuga* del músico alemán Johann Sebastian Bach (1685-1750). La unión de la subjetividad a las indagaciones matemáticas, unida a tradiciones culturales, sigue siendo motivo de exploración musical en el contexto de la *musicología*.

figura 10 (la nota *do* central corresponde a la nota  $C_4$  en la notación anglosajona). En el recuadro 32 abordé los orígenes de los nombres de las notas musicales. Entonces:

$$f_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \times f_1 = \left(\frac{3}{2}\right) \times 261 \text{ Hz} = 391.5 \text{ Hz},$$

que corresponde aproximadamente a la frecuencia de la nota *sol* en la misma escala; la frecuencia exacta de la nota *sol* es de 391.1 Hz. Así pues, se dice que la nota *sol* está una quinta por encima de la nota *do*. ■

Tomando en cuenta lo expuesto en el ejemplo precedente, ¿qué pasa al aplicar la proporción  $\frac{3}{2}$  a la nota *sol*? En tal caso:

$$\left(\frac{3}{2}\right) \times f_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \times 391.5 \text{ Hz} = 587.25 \text{ Hz},$$

que corresponde aproximadamente a la frecuencia de la nota *re* en la cuarta octava de la gama temperada. Esto significa que esta nota está dos quintas por encima de la nota *do*. De esta manera, partiendo del *do* central la así denominada escala diatónica se construye encadenando cinco quintas consecutivas por encima y una quinta por debajo, lo cual da lugar a las notas siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{fa} & \leftarrow & \text{do} & \rightarrow & \text{sol} & \rightarrow & \text{re} & \rightarrow & \text{la} & \rightarrow & \text{mi} & \rightarrow & \text{si} \\ \frac{2}{3} \times f & & f & & \frac{3}{2} \times f & & \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times f & & \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times f & & \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times f & & \left(\frac{3}{2}\right)^5 \times f \end{array},$$

indicando en cada caso la frecuencia que corresponde a cada nota a partir de la frecuencia de la nota *do*. La flecha orientada hacia la derecha entre dos notas significa que se va de una nota dada a otra que está una quinta hacia arriba. En cuanto a la flecha orientada hacia la izquierda, significa que se está disminuyendo la frecuencia en una quinta. Este conjunto de notas recibe el nombre de *escala diatónica mayor*.

#### MÁS ALLÁ DE LA QUINTA PERFECTA

De manera similar a lo expuesto para la quinta, el intervalo 4 : 3 se obtiene mediante la media armónica aplicada a los extremos de la octava 12 : 6.

**Recuadro 32.** Orígenes de los nombres de las notas musicales

El origen de los nombres de las siete notas en la tradición latina, a saber: *do, re, mi, fa, sol, la, si*, se halla en la primera estrofa de un canto gregoriano medieval creado en latín en el siglo VIII por el poeta y monje benedictino Paulus Diaconus. Este canto, muy popular en los monasterios de la época, es un himno a san Juan Bautista y la estrofa es la siguiente:

*Ut queant laxis,  
Resonare fibris,  
Mira gestorum,  
Famuli tuorum,  
Solve polluti,  
Labbii reatum,  
Sancte Ioannes.*

Esta estrofa se traduce aproximadamente al español como:

*Para que tus maravillosos logros resuenen con el hilo relajado  
de nuestros labios, libera del pecado a tus siervos inmundos, oh  
San Juan.*

El compositor y también monje benedictino Guido de Arezzo tomó la estrofa precedente en el siglo XI e inventó los nombres de las notas musicales (con la finalidad de facilitar la composición musical). Para ello utilizó la primera sílaba del inicio de cada semiverso para las primeras seis notas: **Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La**. Para la última, esto es **Si**, utilizó la primera letra de *Sancte* y de *Ioannes*. ¿Por qué utilizó este canto? Porque tiene la particularidad de subir de tono al inicio de cada uno de los primeros hemistiquios. La progresión del canto implica entonces recorrer la escala tonal. En el siglo XVI se cambió **Ut** por **Do**, tomando la primera sílaba de la palabra en latín *Dominus* (en español: el “Señor”), porque era complicado utilizarla en el solfeo.

La media geométrica por su lado da lugar a lo que se conoce como quinta disminuida y hace intervenir al terrible número irracional  $\sqrt{2}$ . En el contexto de la composición musical que sigue el canon tonal se han elaborado a lo largo del tiempo métodos que se sirven de cálculos simples, como el que se aplica para construir la escala precedente, para obtener sonidos simultáneos o sucesivos consonantes, esto es, subjetivamente placenteros. Aquí conviene puntualizar que el oído de los melómanos ha sido educado para reconocer tales consonancias y sentir placer al hacerlo. Sin embargo, a los fanáticos del *trash metal*, que en términos musicales utiliza muchas notas que no tienen nada que ver con la tonalidad, les tiene muy sin cuidado la construcción pitagórica de las escalas musicales. El placer es en gran medida un constructo social.

#### MATEMÁTICAS Y MÚSICA HOY EN DÍA

Para finalizar con este capítulo, reitero que se puede constatar con facilidad que algunos de los conceptos matemáticos que se formalizaron en la Antigua Grecia siguen presentes en la cultura contemporánea. En el caso de la música occidental esto es por demás obvio, aunque esto no significa en lo más mínimo que la música sea una parte de las matemáticas, como suelen afirmarlo de tiempo en tiempo matemáticos profesionales practicantes de la música. Sin embargo, se puede afirmar que la música clásica, a la que también se denomina música académica, está impregnada del matematicismo pitagórico. En Occidente esta asociación entre matemáticas y música tiene una expresión contemporánea muy clara en lo que se denomina música generativa, un concepto originalmente debido al músico británico Brian Eno, quien lo acuñó en 1995, que llega a servirse de la composición algorítmica ejecutada por computadoras digitales. El uso de computadoras digitales en el proceso de creación musical incluye hoy en día exploraciones en torno a la improvisación asistida por técnicas de inteligencia artificial. Aquí aparece un cuestionamiento importante:

¿Se puede automatizar la improvisación en la música? La respuesta a esta pregunta es abordada por la perspectiva de indagación científica que se reconoce como *las ciencias de la complejidad*. No se tiene hasta ahora una respuesta.

Eso sin lugar a dudas habría sorprendido a más de uno de los matemáticos griegos que exploraron la relación entre geometría y música, aunque quizás no tanto al matemático e ingeniero inventor de autómatas Ctesibio, quien creó en el siglo III a.C. el *hydraulis*, órgano hidráulico, el primer instrumento musical de teclado, que el Imperio romano difundiría en la cuenca del Mediterráneo y que, a través de un proceso cultural evolutivo, llevaría al instrumento en el que se expresaría el asombroso virtuosismo musical de Johann Sebastian Bach en el siglo XVIII y al órgano electrónico transistorizado del cual se serviría el músico y cineasta Ray Manzarek, cofundador, con Jim Morrison, de la banda estadounidense de rock *The Doors* entre 1965 y 1973.

Dejo este capítulo con la música de los Doors en mi mente y me dirijo ahora hacia el territorio de los números primos:

*You know that it would be untrue  
 You know that I would be a liar  
 If I was to say to you  
 Girl, we couldn't get much higher*

*Come on, baby, light my fire  
 Come on, baby, light my fire  
 Try to set the night on fire*

«Light My Fire», canción de la banda estadounidense The Doors (1966).



## Teorema 7. La factorización en números primos de un número natural existe y además es única

He aquí la séptima declaración matemática incluida en este libro. Debido a la significación cultural del número 7, elegí para este capítulo un resultado celebre de la teoría de números, la rama de las matemáticas que se dedica precisamente al estudio de los números y para la cual los números primos han sido desde hace siglos una de las clases de objetos matemáticos más populares.

El número 7 es justamente un número primo. La declaración elegida se conoce en la literatura matemática bajo la denominación rimbombante de *teorema fundamental de la aritmética*, lo cual indica claramente la importancia que los matemáticos le han dado al resultado que concierne este capítulo (sí, a muchos matemáticos les encanta la solemnidad). Con respecto a su demostración —y aunque en los *Elementos* de Euclides se encuentra demostrada una versión simplificada de esta declaración—, se le atribuye hoy en día la primera demostración al celebre matemático prusiano Carl Friedrich Gauss, quien la publicó en 1801. En ese año él tenía apenas 24 años de edad e incluyó la demostración en su texto *Investigaciones aritméticas*, escrito en latín bajo el título de *Disquisitiones arithmeticae*. Antes de proceder a la demostración, resulta conveniente una breve explicación de lo que se entiende por factorización de un número natural y, más específicamente, de lo que significa la factorización de los números naturales en números primos. Para ello me serviré a continuación de un par de ejemplos.

EJEMPLO 12. Considere el número natural 1407. Se procede entonces a factorizarlo. Tomando en cuenta únicamente factores positivos,<sup>21</sup> no es muy complicado establecer que este número posee diferentes factorizaciones, es decir, se puede representar como el producto de números naturales de menor magnitud. En este caso todas las factorizaciones del número natural 1407 están dadas por los siguientes conjuntos de números naturales:

$$\{1, 3, 469\}, \quad \{1, 7, 201\}, \quad \{1, 21, 67\}, \quad \{1, 3, 7, 67\}.$$

Esto significa simplemente que

$$1 \times 3 \times 469 = 1407,$$

$$1 \times 7 \times 201 = 1407,$$

$$1 \times 21 \times 67 = 1407,$$

$$1 \times 3 \times 7 \times 67 = 1407.$$

Como puede verse, para cada uno de estos conjuntos el producto de los elementos constitutivos da el número 1407. Note que en cada caso los números se ordenaron del menor al mayor. La particularidad de la última factorización, esto es,  $\{1, 3, 7, 67\}$ , radica en que todos sus elementos, exceptuando el número 1, son números primos, los cuales no admiten ninguna factorización; cada uno de estos números sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores. ■

La declaración que concierne a este capítulo se formula de manera formal como sigue:

*Todo número natural, digamos  $n$ , mayor o igual a 2, esto es  $n \geq 2$ , se puede descomponer como un producto de factores primos de forma única. Dado que esto es obviamente cierto para  $n = 2$ , se afirma el resultado para  $n \geq 2$ .*

En términos simbólicos, esta declaración matemática se expresa de la siguiente manera:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_i^{\alpha_i},$$

donde

<sup>21</sup> Dado un número natural, digamos  $n$ , se dice que el número natural  $x$  es factor de  $n$  si existe un número natural  $p$  tal que  $n = p \times x$ . Note que  $p$  es también factor de  $n$ . El conjunto  $\{x, p\}$  constituye una factorización de  $n$ .

- el número natural  $p_i$  denota el  $i$ -ésimo número factor primo de  $n$ ;
- el entero positivo  $\alpha_i$  denota la multiplicidad de  $p_i$ , esto es, cuántas veces aparece  $p_i$  como factor;
- el entero positivo  $i$  denota el número de factores primos distintos.

En el ejemplo precedente

$$1407 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3},$$

donde

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 7, \quad p_3 = 67$$

y

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1.$$

¿Qué pasa cuando factores primos de un número natural dado se presentan con multiplicidades diferentes a 1? Ilustro esta situación con el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 13.** *Considere el número 18. En este caso se tienen las factorizaciones siguientes:*

$$\{1, 2, 9\}, \quad \{1, 3, 6\}, \quad \{1, 9, 2\}, \quad \{1, 2, 3, 3\}.$$

*En este caso la factorización de 18 en números primos está dada por  $\{2, 3, 3\}$ . Esto es:*

$$18 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2},$$

donde

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2.$$

*Como puede verse el número primo 3 aparece como factor de 18 con una multiplicidad igual a 2.* ■

Confío en que los ejemplos precedentes sean suficientes para exponer lo que significa la factorización de números naturales en factores primos. Paso entonces ahora a la demostración del *teorema fundamental de la aritmética*.

## DEMOSTRACIÓN:

En lo que sigue se demuestra el teorema mediante el método de *inducción*, dividiéndola en dos partes:

PARTE 1: La primera concierne a la demostración de la existencia de la factorización de todos los números naturales mayores que 2 en números primos.

PARTE 2: La segunda parte concierne a la demostración de que dicha factorización es única.

Procedamos entonces.

## PARTE 1: EXISTENCIA

Para esta parte, centrada en demostrar que todo número natural se puede representar como un producto de factores primos, comienzo por verificar el caso base y posteriormente abordo el paso inductivo.

*Caso base:* La factorización es verdadera para  $n = 2$ , dado que 2 se puede escribir como

$$n = 2 = 1 \times 2,$$

donde 1 y 2 son los factores de  $n = 2$ . Como puede verse, el número 2 no es compuesto, ya que sólo posee a los números 1 y 2 como factores. Esto es 2 es un número primo. Conviene aquí puntualizar que en general para los matemáticos el número 1 no es un número primo. Incluí en este capítulo el recuadro 33 para clarificar este punto.

*Paso inductivo:* Considere que se ordenan los números naturales de menor a mayor. Supóngase entonces que el resultado es cierto para

$$n = 2, 3, 4, \dots, k.$$

Si  $(k + 1)$  es un número primo se termina con la demostración. Si éste no es el caso,  $(k + 1)$  tiene un factor primo más pequeño, el cual se denotará en lo que sigue mediante  $p$ .

Sea entonces:

$$k + 1 = p \times N.$$

**Recuadro 33.** El número 1 no es primo

Al enlistar los primeros números primos es común en muchos textos de matemáticas básicas incluir al número 1 entre ellos. La lista suele entonces comenzar como 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., y así sucesivamente. Sin embargo, esto es erróneo, ya que los matemáticos han decidido que el número 1 no sea un número primo. Esta decisión viene directamente de la definición formal que se hace de los números primos: es todo número natural *mayor* que 1 que sólo tiene como divisores al número 1 y a sí mismo. Alternativamente, se definen como los números naturales que poseen únicamente dos factores (es decir, dos divisores) *distintos*: el 1 y a sí mismos. En ambos casos esto excluye al número 1, porque no es mayor a sí mismo y porque sólo se tiene a sí mismo como factor. Es importante que no haya ambigüedad en la definición de los números primos, o en la de cualquier otra entidad matemática. Una de las características fundamentales del pensamiento matemático radica en la ausencia de ambigüedad.

Dado que  $N < k$ , por la hipótesis inductiva  $N$  se puede escribir como el producto de números primos. Esto significa que

$$k + 1 = p \times N$$

puede también escribirse como un producto de números primos, lo cual finaliza la demostración de existencia.  $\square$

Hasta aquí se ha demostrado que todo número natural se puede descomponer en factores primos. Pasemos ahora a la demostración de unicidad.

**PARTE 2: UNICIDAD**

Corresponde ahora demostrar que sólo existe una manera de factorizar un número entero mediante el producto de un conjunto no ordenado de números primos. Para facilitar la exposición, se presenta únicamente la demostración de unicidad para el caso en el que los factores primos tienen multiplicidad igual a 1.

La demostración que sigue se sirve del lema de Euclides, que establece que si un número primo  $p$  divide al producto de dos números naturales  $a$  y  $b$ , entonces  $p$  divide a  $a$  o divide a  $b$  (o divide a ambos).

Supongamos entonces que un número natural  $n$  es el producto de números primos de dos maneras diferentes:

$$\begin{aligned} n &= p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \\ &= q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_j. \end{aligned}$$

Esto es:

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_i\}$$

y

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_j\}$$

son factorizaciones primas de  $n$ . Por simplicidad, supóngase que los números primos en estas factorizaciones están ordenados de manera ascendente (nada lo prohíbe, ¿no es cierto?). Esto es:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_i$$

y

$$q_1 < q_2 < q_3 < \cdots < q_j.$$

Por el lema de Euclides, dado que todos los elementos en el conjunto  $\{q_1, q_2, \dots, q_j\}$  son primos (se dice que forman un conjunto de números coprimos),  $p_1$  puede y debe dividir sólo uno de estos primos. Dado que  $q_1$  es el primo más pequeño, entonces  $p_1 = q_1$ . Siguiendo el mismo método se llega a la conclusión de que

$$p_k = q_k$$

y en consecuencia  $i = j$ . Esto permite concluir que la combinación de números primos en ambos casos es la misma y de esta manera se concluye la demostración del *teorema fundamental de la aritmética*. Esto para el caso en el que todos los factores primos involucrados poseen multiplicidad igual a 1.  $\square$

La demostración que acaba de finalizar implica que los números naturales se pueden dividir en dos grandes categorías:

- los que se pueden factorizar en números primos y
- los que no se pueden factorizar así, esto es, los mismos números primos.

Esta constatación llevó a matemáticos pitagóricos de la Antigua Grecia a considerar a los números primos como una suerte de bloques constructivos de los números, siguiendo una lógica de corte atomista similar a la que desarrollaron en esa era Leucipo de Mileto y su discípulo Demócrito, al abordar desde el razonamiento el estudio de la composición de la materia. Tal conceptualización de los números primos, es decir, su indivisibilidad, les ha dado un lugar muy especial en el imaginario social. En lo que sigue abordo este asunto de manera sucinta.

## LOS NÚMEROS PRIMOS EN EL IMAGINARIO SOCIAL

Una vez demostrado el *teorema fundamental de la aritmética*, siento que conviene dedicar algunos párrafos finales en este capítulo para ilustrar la influencia que los números primos tienen en el imaginario social contemporáneo. Le corresponderá al lector juzgar si esto es necesario. Elegí entonces con dicha finalidad los cuatro comentarios que enlisto a continuación.

**PRIMOS GEMELOS:** El 12 de junio de 2005 inició el proyecto de cómputo distribuido PrimeGrid, desarrollado en el contexto del esfuerzo de búsqueda de inteligencia extraterrestre (SETI, siglas en inglés de Search for Extraterrestrial Intelligence), actualmente bajo la responsabilidad del SETI Institute, localizado en Mountain View en California, Estados Unidos. El proyecto PrimeGrid se realiza mediante el esfuerzo voluntario colectivo de computadoras personales conectadas en internet, a las que se les instala un programa de cómputo<sup>22</sup> que

<sup>22</sup> El programa se denomina BOINC, acrónimo de Berkeley Open Infrastructure for Network Computing, es decir, *Infraestructura Abierta de Berkeley para la Computación en Red*, desarrollado inicialmente por la Universidad de California en Berkeley, Estados Unidos. Se trata de una infraestructura informática orientada al cómputo distribuido en computadoras personales, que se ha generalizado para su aplicación en proyectos de índole diversa (matemáticas, astrofísica, biología molecular, medicina, entre otras áreas científicas).

aprovecha tiempos muertos para colaborar en la búsqueda de números primos de grandes dimensiones (esto es, con cientos de miles de dígitos).<sup>23</sup> Uno de los productos de este esfuerzo es la elaboración de un listado de números primos gemelos, que son números primos a los que sólo los separa una distancia de 2. Por ejemplo, los números:

$\{3, 5\}$ ,  $\{5, 7\}$ ,  $\{11, 13\}$ ,  $\{17, 19\}$ ,  $\{29, 31\}$ ,  $\{41, 43\}$ ,  $\{59, 61\}$ ,

son números primos gemelos. La pareja de primos gemelos más grande (medida por el número de dígitos de los números) hallada hasta ahora por PrimeGrid es (esto ocurrió el 14 de septiembre de 2016):

$$2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1,$$

que posee 388 342 dígitos. El símbolo  $\pm 1$  significa *más 1 y menos 1*. El cómputo de estos números tiene múltiples propósitos (uno de ellos es el de llamar la atención de personas que se interesan en esta clase de temas e inducirlos a colaborar en proyectos cobijados por BOINC; otro radica en probar nuevas tecnologías de cómputo distribuido) y quizás el más importante sea el de mostrar que las matemáticas pueden ser divertidas.

**LA SOLEDAD DE LOS NÚMEROS PRIMOS:** En el año 2008, el físico y novelista italiano Paolo Giordano publicó su novela *La solitudine dei numeri primi* (en español, *La soledad de los números primos*, publicada por Ediciones Salamandra en Barcelona, Cataluña). Los protagonistas de la novela son, alegóricamente hablando, “números primos gemelos”. Con ello, el autor lleva al lector a imaginarse la dificultad que los protagonistas tienen para entenderse, pese a que están muy cerca el uno de la otra (se trata de una pareja heterosexual de amigos con características de personalidad que les hace muy difícil encajar en sociedad).

<sup>23</sup> Computar números primos con una gran cantidad de dígitos es una tarea de gran importancia tecnológica. Una de las razones de esto radica en el uso de tal clase de números primos en métodos de encriptamiento de información (lo cual es requerido en las comunicaciones electrónicas de nuestros días, incluyendo las ligadas a transacciones económicas y financieras). La seguridad del famoso método de encriptamiento RSA (acrónimo asociado a los apellidos de sus autores: Ronald L. Rivest, Adi Shamir y Leonard M. Adleman) se basa en la dificultad de descomponer un número que se construye mediante el producto de dos números primos de grandes dimensiones.

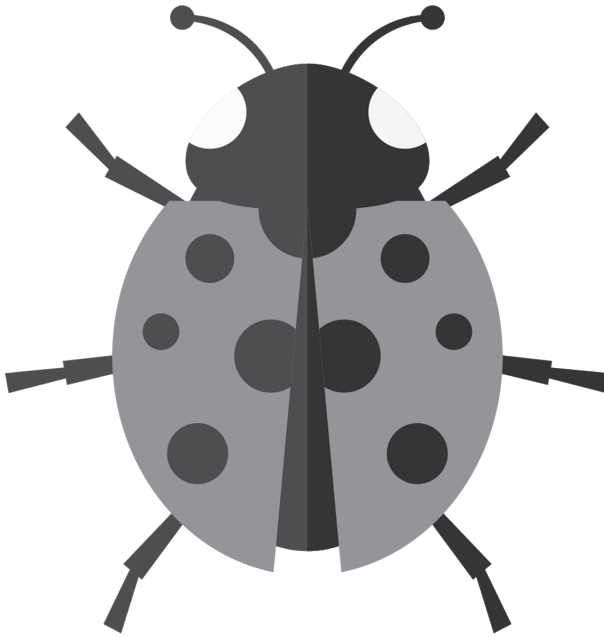
La novela fue llevada al cine por el cineasta italiano Saverio Costanzo en el año 2010. Más allá de la ficción literaria, al reflexionar en torno a la metáfora de la soledad de los números primos no es difícil asociar la idea con la vida de algunos matemáticos célebres. El matemático inglés Alan Mathison Turing –uno de los padres fundadores de la teoría matemática del cómputo y quien, por cierto, fue uno de los pioneros en los años 40 del siglo xx en el uso de computadoras digitales para explorar las propiedades de los números primos– sería uno de esos solitarios que no encajan fácilmente en la sociedad en la que les tocó vivir.

**CIGARRAS PERIÓDICAS:** En el este de América del Norte, principalmente en los Estados Unidos, habitan las cigarras periódicas. Estos insectos, del género *Magicicada*, salen de su estado juvenil después de pasar 13 o 17 años (tanto 13 como 17 son números primos) bajo tierra, alimentándose de fluidos provenientes de las raíces de árboles caducifolios. Salen a la superficie en la primavera de su año 13 o 17, para reproducirse durante las pocas semanas que les quedan de vida. Existen dos hipótesis complementarias del porqué de los ciclos primos de 13 y de 17 años. Una de ellas postula que se trata de un mecanismo evolutivo que elimina la posibilidad de sincronizar la emergencia al estado adulto con los ciclos reproductivos de posibles depredadores. Esta hipótesis ha sido sustentada mediante técnicas matemáticas por el físico chileno Mario Markus, quien labora en el Instituto Max Planck de Alemania. La otra hipótesis sostiene que los tiempos de desarrollo con números primos representan una adaptación para evitar la hibridación entre poblaciones con diferentes ciclos durante un periodo de fuerte presión de selección provocada por poblaciones aisladas y bajas durante los estadios glaciales del Pleistoceno. Esta hipótesis fue postulada en 1988 por el geólogo estadounidense Randel Tom Cox y el entomólogo estadounidense Christopher E. Carlton. Este fenómeno de emergencia de las poblaciones de cigarras periódicas es supervisado de manera intensa y se tienen identificadas a gran parte de sus poblaciones, cada una de las cuales ha recibido un nombre específico para facilitar su estudio, el cual se sirve de numerales

romanos. Así, por ejemplo, la población X (diez en numerales romanos), conocida como *Gran Cría del Este* (en inglés: *Great Eastern Brood*) emerge cada 17 años, habiéndose reportado por primera vez en 1715. La emergencia correspondiente al 2021 alcanzó su pico en la capital estadounidense, Washington D.C., el 20 de mayo de ese año. En el sitio web <http://magicicada.org/magicicada/> puede revisarse la información relativa a las próximas emergencias. Hoy en día existe una gran preocupación en torno a la aceleración en curso del cambio climático y sus efectos sobre los periodos de emergencia de estos insectos. Se ha conjeturado que estos insectos poseen un reloj molecular interno que lleva la cuenta de los años que pasan a partir de información provista por cambios en los árboles de los que se alimentan. Dichos cambios estarían asociados a los ciclos de cambio del follaje de los árboles, lo cual depende en gran medida de la temperatura ambiental.<sup>24</sup>

**COCCINELLA SEPTEMPUNCTATA:** La catarina de siete puntos, como se denomina en México al escarabajo *Coccinella septempunctata*, fue introducida en América del Norte desde Europa a comienzos de los años setenta del siglo xx para combatir plagas de parásitos de las plantas. Este insecto, ilustrado de manera lúdica en la figura 11, posee siete puntos en los élitros. De allí el nombre científico, proveniente del latín: *septem*, “siete”, y *punctata*, “punteada”. En España y muchos otros países de habla hispana se denomina a este insecto “mariquita” y se suele afirmar que el nombre se le ha dado en honor de la Virgen María (figura central el catolicismo español). Así, los élitros rojos simbolizarían el manto rojo de la Virgen con los siete puntos, que representan sus siete alegrías y sus siete dolores. Al igual que en este caso, el número primo 7 ha tenido diversos simbolismos a lo largo del tiempo. Los pitagóricos lo consideraban sagrado al relacionarlo con los planetas que se conocían en su tiempo. La selección de las notas musicales en el canon occidental se debe a la sacralización del número 7, lo que

<sup>24</sup> Me permito mencionar que se conocen otras dos poblaciones de cigarras periódicas y que siguen otro patrón de emergencia. La de Fiyi, república insular localizada en Oceanía, emerge cada 8 años. La otra población emerge cada cuatro años en el estado de Meghalaya en el noreste de la India.



**Figura 11.** *Coccinella septempunctata*

La figura ilustra de manera esquemática la estructura del insecto de la especie *Coccinella septempunctata*. Este escarabajo posee élitros de color rojo con tres puntos negros en cada uno, y uno más sobre el lugar donde ambos se juntan, lo que hace un total de siete puntos, de allí el nombre científico de la especie. La imagen se generó con base en código  $\text{\LaTeX}$  que se sirve del paquete TikZ. Ilustración basada en el código de Mark Wibrow: <https://tex.stackexchange.com/users/23215/mark-wibrow>.

llevaría a Isaac Newton a inventar los siete colores del arcoíris que “observó” en sus famosos experimentos de descomposición de la luz blanca, ayudándose para ello de un prisma. Para muchos, hallarse una catarina (o mariquita) da buena suerte (siempre y cuando esos muchos no sean pulgones) y el número primo 7 tiene que ver mucho con la persistencia de esta creencia inofensiva..., a menos que se crea

que romper un espejo trae 7 años de mala suerte, creencia que se remontaría según algunas fuentes a los tiempos del Imperio romano.

Como espero haya quedado claro con los comentarios precedentes, por las más diversas razones, los números primos han sido motivo de interés a lo largo de milenios y seguramente lo seguirán siendo durante todavía mucho tiempo. Dejo hasta aquí este capítulo, para pasar en el siguiente a un nuevo teorema, que concierne a una propiedad que es satisfecha por todos los triángulos en geometría euclidiana.

## Teorema 8. La suma de los ángulos de todo triángulo en geometría euclidiana es igual a $180^\circ$

Los triángulos son sin lugar a dudas la clase más básica de polígonos. En términos euclidianos, estos objetos están constituidos únicamente por tres bordes e involucran por ello únicamente a tres vértices. Los triángulos son fáciles de dibujar sobre un plano. En efecto, basta con colocar tres puntos no alineados (los vértices) y luego unirlos de manera adecuada por medio de tres líneas rectas (los bordes). Debido a su simplicidad, esta clase de polígonos fue motivo de interés desde muy temprano para los estudiosos de la antigüedad que se abocaron a elaborar abstracciones idealizadas de los objetos materiales que percibían. Para el filósofo griego Platón, los triángulos constituyen los bloques básicos con los que se construyen los objetos materiales, y llegó en sus reflexiones a incluso conceptualizarlos como entidades intermediarias entre el mundo material y el mundo de las ideas. Puesto que pertenecen a una clase específica de objetos matemáticos, es de esperarse que todos los triángulos posean ciertas características que los identifican como pertenecientes a su clase. Una de tales características está asociada con la importante noción de *invariancia*, a la cual dedico el recuadro 34. La declaración matemática que concierne a este capítulo asocia una propiedad de invariancia a los triángulos y constituye por ello un resultado clásico en la caracterización de las propiedades de estos objetos en geometría euclidiana.

Con respecto a la figura 12 (p. 185), el teorema que se aborda aquí asegura la satisfacción de la siguiente igualdad:

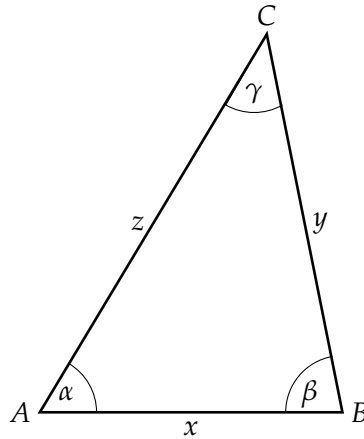
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

**Recuadro 34.** Invariancia en matemáticas

La noción de invariancia tiene gran importancia en el ámbito de las matemáticas modernas. Este concepto se utiliza en el marco de la caracterización formal de las propiedades de los objetos matemáticos que no cambian cuando a dichos objetos se les aplican ciertas operaciones o transformaciones. Esto implica que lo invariante define al objeto en términos estructurales, por lo cual se suele decir que el objeto matemático en cuestión está definido por sus invariantes estructurales, que definen así su esencia. Esto sin olvidar con respecto a qué es invariante el objeto. Debido a esto no se puede hablar de invariancia de un objeto matemático sin especificar la transformación específica ante la cual el objeto afectado permanece inmutable. Dado que las transformaciones son también objetos matemáticos, la invariancia cuantifica a fin de cuentas propiedades de interacción entre clases de objetos matemáticos. Comprender la interacción entre objetos matemáticos significa dar cuenta de las interacciones entre sus respectivos invariantes estructurales. La perspectiva de exploración de las invariancias de objetos matemáticos se denomina *enfoque estructural* en matemáticas.

lo cual es equivalente a decir que la suma de los ángulos de todo triángulo en geometría euclidiana es igual a la suma de dos ángulos rectos. Esta declaración afirma entonces que no importa si el triángulo es transformado —por ejemplo, cambiando de manera no proporcional la longitud de sus bordes, lo cual se denomina transformación por *deformación*—, la suma de los tres ángulos que lo definen no cambia y es siempre igual a  $180^\circ$ . Esta es, de hecho, una propiedad invariante de todos los triángulos ante el siguiente conjunto de transformaciones matemáticas:

- traslación;
- rotación;
- reflexión;



**Figura 12.** Triángulo en geometría euclidiana – 1

La figura muestra un triángulo denotado  $\triangle ABC$ , para el cual se denotan los ángulos  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$  y  $\gamma = \angle BCA$ . Como puede verse este objeto matemático geométrico euclidiano posee únicamente tres vértices y tres bordes.

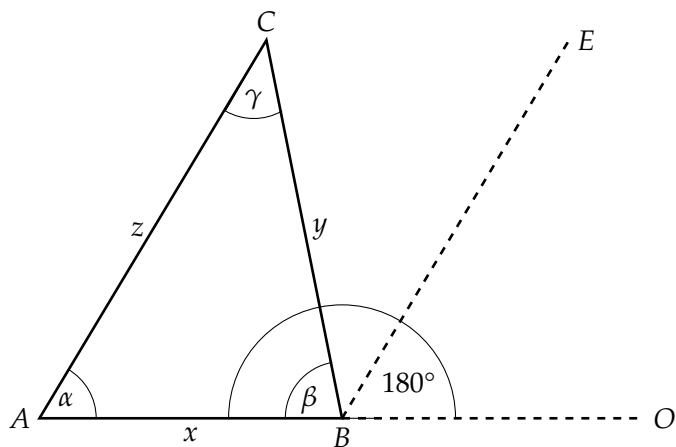
- magnificación;
- deformación.

Este conjunto de cinco transformaciones caracteriza en cierto sentido a los triángulos, siempre y cuando se hallen en el plano euclidiano, como objetos matemáticos geométricos específicos. La especificidad está dada en este caso por la validez de la declaración matemática que concierne a este octavo capítulo, la cual se demostrará en lo que sigue.

#### DEMOSTRACIÓN:

Considere el triángulo euclidiano que se muestra en la figura 12. Se extiende la línea que va del vértice  $A$  al vértice  $B$  hasta el punto  $O$ , tal y como se muestra en la figura 13. Note que el ángulo  $\angle ABO = 180^\circ$ . En lo que resta de esta demostración se verifica que la suma de los tres ángulos del triángulo es igual a dicha cantidad.

Se traza entonces la línea  $\overline{BE}$  que es paralela a la línea  $\overline{AC}$ , tal y como se muestra en la figura 13. Esto significa que el ángulo  $\alpha$  coincide con el ángulo  $\angle EBO$  y que el ángulo  $\gamma$  coincide con el ángulo  $\angle CBE$ .



**Figura 13.** Triángulo en geometría euclidiana – 2

La figura muestra un triángulo  $\triangle ABC$ , para el cual se denotan los ángulos  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$  y  $\gamma = \angle BCA$ .

En consecuencia se concluye que

$$\beta + \angle CBE + \angle EBO = 180^\circ = \beta + \gamma + \alpha,$$

y es así como se finaliza la demostración.  $\square$

Como puede observarse de lo que se ha demostrado, la adición de la línea paralela a la línea  $\overline{AC}$  en la figura 13 pone de manifiesto la propiedad del triángulo de que la suma de los ángulos es igual a  $180^\circ$ . Eso lleva a la conclusión de que la declaración matemática que viene de demostrarse es estrictamente equivalente al *problemático axioma de las paralelas de Euclides*, también enunciado en la literatura matemática como el quinto postulado de Euclides, pues esa es la posición en la que se ubica en los *Elementos*. Esta equivalencia pone en discusión la naturaleza misma de la propiedad de los triángulos que concierne a este capítulo, ya que de hecho se podría considerar como un axioma y no como un teorema. Si este fuese el caso no se requeriría de ninguna demostración, ya que la validez de la declaración matemática que nos concierne sería entonces evidente. Bastaría con decir que el quinto postulado de Euclides y la propiedad de que la suma de todos los ángulos internos de todo triángulo euclidiano es

igual a  $180^\circ$  son estrictamente equivalentes. Sin embargo, se ha llegado a especular que el mismísimo Euclides dudaba de que su quinto postulado fuese un axioma. Debido a esto durante más de dos mil años ha habido múltiples intentos por demostrar, todos ellos infructuosos, que se trata de un teorema y no de un axioma. ¿Qué se hace entonces en este caso? Tomar una decisión. Seguiré aquí la tradición y me mantendré en la consideración de que la declaración matemática que ha sido demostrada en lo que antecede es un teorema que se sirve del postulado de las paralelas de Euclides. Esto implica necesariamente que no estoy aceptando la equivalencia, puesto que, desde mi perspectiva, no es evidente que la declaración matemática que intitula este capítulo sea válida. La certidumbre me llega justo con la demostración. En lo que sigue incluyo una breve discusión en torno al porqué dicho postulado ha sido considerado históricamente como problemático.

## EL HIJO DESOBEDIENTE

Comienzo esta sección incluyendo a continuación una cita celebre, al menos en el universo social de los matemáticos:

*A paralellákat azon az útan ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig – megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne...*

Esta cita, escrita en húngaro en una carta que le envió en 1820 el matemático húngaro Farkas Bolyai a su hijo, el también matemático János Bolyai. Esta cita se traduce al español como sigue:

*No intentes las paralelas de ese modo: he conocido a todo lo largo esa ruta. He medido esa noche sin fondo y toda la luz y toda la alegría de mi vida se apagaron...*

Farkas Bolyai le pidió así a su hijo que no intentara demostrar el quinto postulado de Euclides. El hijo, desobedeciendo a su padre, no le hizo caso y sus exploraciones lo llevaron a la construcción de la geometría no euclidiana, una de las más grandes invenciones matemáticas del siglo XIX. La característica principal de dicha geometría radica justamente en

el no cumplimiento del postulado de las paralelas de Euclides. Infortunadamente, Carl Friedrich Gauss, amigo de Farkas Bolyai, se negó a promover la investigación matemática de János Bolyai, alegando que al hacerlo *estaría promoviendo sus propias ideas al respecto*. Esta extraña respuesta le causó un gran disgusto a János Bolyai, a quien Carl Friedrich Gauss consideró en su momento como un genio. Este acontecimiento, quizás motivado por los celos o la envidia de Carl Friedrich Gauss (sí, hasta el así llamado *príncipe de las matemáticas* podía ser afectado por emociones) debido a los logros de János Bolyai, ha minimizado con el tiempo el papel que éste tuvo, junto con el matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski, en la formalización de la geometría no euclidiana y su adaptación a las descripción formal de las propiedades geométricas del espacio físico. La geometría no euclidiana, que se sirve de todos los postulados de la geometría euclidiana, salvo el problemático quinto postulado, nació de la renuncia a la comodidad que da abstraer las propiedades del universo físico empleando para ello los desarrollos geométricos de Euclides, y sentó las bases matemáticas necesarias para la construcción de la *teoría de la relatividad*, uno de los dos pilares de la física moderna, concebida por el legendario físico estadounidense de origen judío-alemán, Albert Einstein, a principios del siglo xx; el otro pilar es la *mecánica cuántica*. A fin de cuentas el camino seguido por János Bolyai, el hijo desobediente, y Nikolái Ivánovich Lobachevski resultó ser muy provechoso para la ciencia.

Con el teorema que se ha demostrado en este capítulo terminó la exposición de las ocho declaraciones matemáticas más sencillas que he incluido en este libro. De cierta manera los teoremas considerados hasta ahora han sido algo así como las entradas del banquete y espero que el lector las haya encontrado deliciosas. Es tiempo de pasar al plato fuerte y al postre.

## Teorema 9. Sólo existen 5 poliedros regulares convexos

Platón elaboró en la última etapa de su vida el *Timeo*, uno de sus diálogos más celebres. En dicho escrito, elaborado hacia el año 360 antes de nuestra era –sin duda el trabajo más influyente de Platón en la filosofía posterior a su época y por ello una de las obras filosóficas más importantes del pensamiento occidental–, el filósofo ateniense despliega una cosmovisión que resume su ambiciosa perspectiva filosófica. En el *Timeo* se presenta la reflexión de Platón no sólo en torno al origen y la naturaleza del mundo físico, sino también de lo que él concebía como el alma humana.

En ambos casos la propuesta de Platón comprende la intervención de un *demiurgo*, visto por él como un dios creador del mundo y autor del universo, al cual presenta como la causa primera de éste. Platón también explora en el *Timeo* las características del conocimiento científico y se expresa en torno al lugar de las matemáticas en la explicación del mundo. Sin duda, en el *Timeo* los matemáticos han hallado a lo largo de los siglos una de sus mejores herramientas para promover el engrandecimiento de su objeto de estudio. En cierto sentido, los matemáticos inclinados hacia el misticismo pueden ser tildados con justeza de platonistas. En lo que concierne a su cosmovisión, Platón la asocia íntimamente a la geometría, y los cinco poliedros regulares convexos poseen en su visión un papel fundamental. El hecho de que estos poliedros fuesen los únicos de su clase fue justificado por Platón de manera *alegórica*,<sup>25</sup> fuera de toda formalización matemática, al afirmar que eran cinco *por necesidad*, y esto porque de

---

<sup>25</sup> Esa es mi opinión, aunque puede ser que para Platón su consideración en torno a los poliedros regulares convexos fuese una convicción íntima independiente de cualquier alegoría. Finalmente, el realismo matemático que cultivaba una gran parte de los matemáticos está anclado en gran medida en la propuesta filosófica expuesta en el *Timeo*.

acuerdo con su cosmovisión el mundo está constituido únicamente por cinco elementos básicos. En el recuadro 35 (p. 194) incluyo la perspectiva platónica con respecto a los elementos constitutivos de la naturaleza, contrastándola con otras propuestas similares también elaboradas en la antigüedad. Platón ligó simbólicamente los poliedros regulares convexos con los cinco elementos constitutivos de la naturaleza, según él, de la manera siguiente:

**FUEGO:** Simbolizado por el *tetraedro*, compuesto de cuatro caras idénticas, que son triángulos equiláteros, con cuatro vértices y seis bordes (véase la figura 14-(a)).

**TIERRA:** Simbolizado por el *hexaedro* (o cubo), compuesto de seis caras cuadradas idénticas, con ocho vértices y doce bordes (véase la figura 14-(b)).

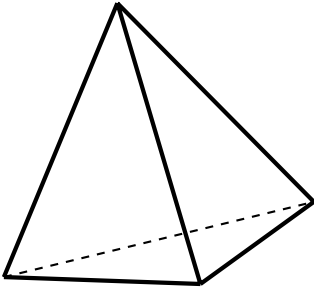
**AIRE:** Simbolizado por el *octaedro*, compuesto por ocho caras idénticas, que son triángulos equiláteros, con doce vértices y doce bordes (véase la figura 14-(c)).

**AGUA:** Simbolizado por el *icosaedro*, compuesto de veinte caras idénticas, que son triángulos equiláteros, con doce vértices y treinta bordes (véase la figura 14-(d)).

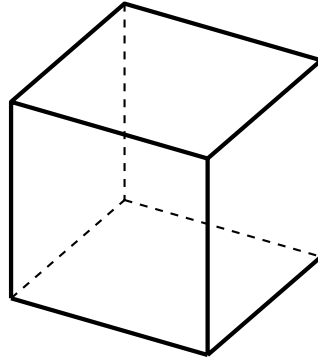
**UNIVERSO:** Simbolizado por el *dodecaedro*, compuesto por pentágonos regulares idénticos, con veinte vértices y treinta bordes (véase la figura 15, p. 192).

Cabe mencionar que el número de caras de estos objetos geométricos, esto es, 4, 6, 8, 12 y 20, está en el prefijo de su nombre, cuya etimología proviene del griego antiguo:

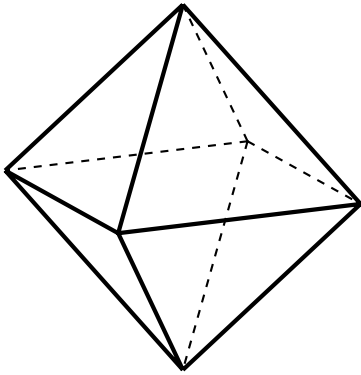
- *tetra* por 4;
- *hexa* por 6;
- *octa* por 8;
- *dodeca* por 12;
- *icosa* por 20.



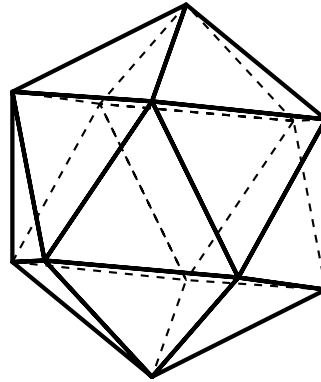
(a) Tetraedro



(b) Hexaedro



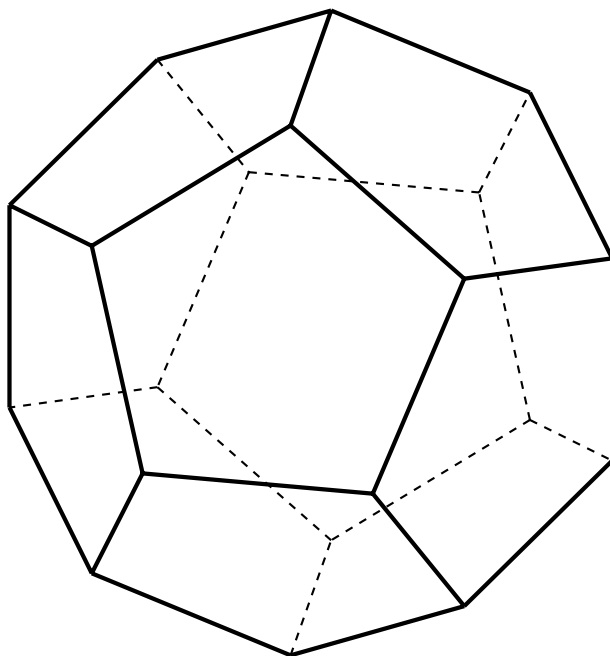
(c) Octaedro



(d) Icosaedro

**Figura 14.** Cuatro poliedros para cuatro elementos de la naturaleza

La figura muestra los cuatro poliedros regulares convexos que Platón utilizó en su diálogo *Timeo* como representaciones simbólicas de los cuatro elementos básicos de su cosmología: fuego, tierra, aire y agua, esto es el tetraedro, el hexaedro, el octaedro y el icosaedro, respectivamente.



**Figura 15.** Dodecaedro

La figura muestra el dodecaedro, poliedro regular convexo del cual Platón se sirvió en su cosmovisión para representar el universo, expuesta en el diálogo conocido como el *Timeo*, completando así la asociación entre los cinco poliedros regulares convexos y los que él consideró como los cinco elementos constitutivos de la naturaleza.

Con respecto a la cosmovisión platónica en el *Timeo* surge el cuestionamiento que motiva la sección que sigue.

**¿CÓMO SABÍA PLATÓN QUE SÓLO EXISTEN CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS?**

Antes de abordar este cuestionamiento conviene especificar por qué los *sólidos platónicos* son denominados poliedros regulares convexos. La razón estriba en que poseen múltiples caras iguales, de ahí los términos *poliedro* y *regular*. La propiedad de convexidad se refiere a que al tomar cualesquiera dos puntos en el espacio tridimensional contenido por el poliedro

y unirlos por medio de una línea recta, ninguno de los puntos de esta queda fuera del poliedro. Una forma de expresarlo es así:

*Un poliedro regular convexo se caracteriza por un conjunto de restricciones que lo distinguen de los objetos geométricos que no lo son.*

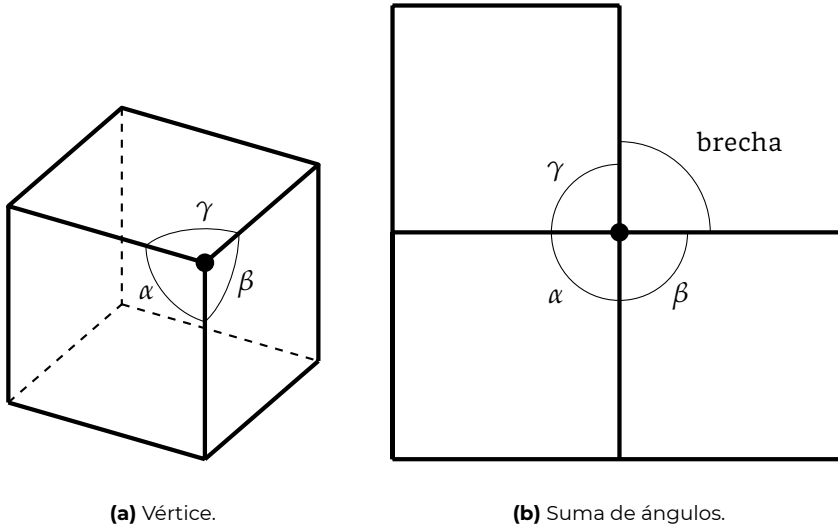
En este y en cualquier otro contexto se puede decir que lo que restringe es también lo que distingue. Regresando a la pregunta, Platón no sabía que sólo existen cinco poliedros regulares convexos, simplemente lo creía. ¿Por qué? Se puede conjeturar que su creencia se debía a que nadie en su tiempo había encontrado ningún otro poliedro regular convexo fuera de los cinco conocidos. Uno puede imaginarse que para los pensadores de la Antigua Grecia interesados en la geometría debió de ser muy estimulante elucidar las razones que subyacen a la inexistencia de otros poliedros regulares convexos. Se ha llegado a afirmar que este interés en los poliedros regulares convexos no fue únicamente algo que se manifestara en exclusiva entre los matemáticos griegos, sino que se llegó a conocerlos incluso fuera de la Antigua Grecia en tiempos anteriores. Sin embargo, las evidencias de esto son por demás débiles. Lo que sí está bien documentado es que la primera demostración de la declaración que concierne a este capítulo fue elaborada por Euclides en los *Elementos*.

*Se considera hoy en día que Euclides escribió los Elementos justamente para exponer la demostración de que sólo existen cinco poliedros regulares convexos, y en consecuencia también se considera que la demostración de la declaración matemática que nos concierne es el resultado matemático más importante de ese tratado fundacional de la ciencia matemática.*

En este capítulo presentaré una demostración que no corresponde a la incluida en los *Elementos*, aunque previamente mostraré de manera esquemática la argumentación que subyace a la demostración de Euclides, a la que se ha tildado de no ser tan rigurosa como debería. Esto de acuerdo con los estándares seguidos por él mismo y que han definido en gran medida el desarrollo de la ciencia matemática desde la Antigüedad hasta nuestros días.

**Recuadro 35.** Los elementos de la naturaleza

La consideración por Platón de la existencia de cinco elementos constitutivos de la naturaleza está construida sobre las perspectivas cultivadas por los filósofos presocráticos. A los elementos considerados por su predecesores, esto es, el fuego, el agua, la tierra y el aire, Platón agregó un nuevo elemento: el *universo*. Este fue entendido como el escenario donde se potencia la realidad, quizás para tomar en cuenta al dodecaedro, el quinto poliedro regular convexo. Posteriormente, Aristóteles hizo a un lado la perspectiva geométrica de su maestro (Platón fue maestro de Aristóteles en la Academia de Atenas, fundada de hecho por él mismo), substituyéndola por una perspectiva con base en combinaciones de cualidades opuestas (tales como la de frío/caliente y la de húmedo/seco), que prevaleció en Europa a lo largo de la Edad Media. La cosmovisión aristotélica tuvo una influencia muy fuerte en la perspectiva médica humoral de la salud humana cultivada por Hipócrates, la cual sólo desapareció (*casi totalmente*), hasta bien entrado el siglo XIX con el advenimiento de la ciencia empírica fundamentada en experimentos controlados. Aunque el pensamiento científico contemporáneo ha vuelto caducos muchos de los preceptos de las cosmovisiones antiguas, mucho de ellos sobrevive en la cultura como constructos metafóricos. También fuera de Occidente se elaboraron en la antigüedad perspectivas interpretativas de la naturaleza con base en la consideración de ciertos elementos constitutivos. Por ejemplo, en la India Antigua la cosmovisión budista (surgida entre los siglos VI y IV a.C.), consideró además del fuego, la tierra, el aire y el agua, un nuevo elemento al que se le podría denominar hoy en día como el *vacío* (o el éter), Akasha o ākāśa en sánscrito. También en la China Antigua se elaboró una cosmovisión centrada en la participación de elementos constitutivos. En efecto, el clásico chino *Dào Dé Jīng*, posiblemente escrito hacia el siglo IV a.C. (con base en conceptos existentes ya en la cultura china de la época), considera cinco elementos: madera, fuego, tierra, metal y agua, que sigue influenciando hoy en día a la medicina tradicional china.

**Figura 16.** Vértice del hexaedro

Uno de los vértices del hexaedro se muestra en la figura (a). La figura (b) ilustra lo que ocurre cuando se aplasta el vértice y la emergencia de la brecha.

## LA ARGUMENTACIÓN DE EUCLIDES

Considere la figura 16 como punto de partida, donde se muestra lo que sucede cuando se aplasta alguno de los cuatro ángulos sólidos de los vértices del hexaedro, esto es del cubo. En la figura 16-(a) se muestra uno de los vértices identificándolo con un círculo negro. Al aplastar el ángulo sólido se forma lo que se muestra en la figura 16-(b), que hace intervenir tres de las caras del hexaedro. En consecuencia, el ángulo sólido resulta en la formación de la brecha indicada, que corresponde a la diferencia entre  $360^\circ$  y la suma de los ángulos de los vértices de las caras que participan en el ángulo sólido. Como se puede observar, al aplastar el ángulo sólido del hexaedro se tiene  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ , por lo que  $\alpha + \beta + \gamma = 270^\circ$ . En este caso la brecha, lo que falta para completar los  $360^\circ$ , tiene un valor igual a  $90^\circ$ .

Se puede seguir el mismo procedimiento para cada uno de los poliedros regulares convexos, lo cual lleva a concluir que la adición de los

ángulos de cualesquiera de los ángulos sólidos aplastados resulta ser igual a

- $180^\circ$  para el tetraedro (cuatro caras iguales con tres vértices), esto es,  $3 \times 60^\circ$ ;
- $270^\circ$  para el hexaedro (seis caras iguales con cuatro vértices), es decir,  $3 \times 90^\circ$ ;
- $240^\circ$  para el octaedro (ocho caras iguales con tres vértices), a saber:  $4 \times 60^\circ$ ;
- $324^\circ$  para el icosaedro (doce caras iguales con cinco vértices), esto es,  $3 \times 108^\circ$ ;
- $300^\circ$  para el dodecaedro (veinte caras iguales con tres vértices), es decir,  $5 \times 60^\circ$ .

En cada caso la brecha resultante es igual a  $180^\circ$  para el tetraedro,  $90^\circ$  para el hexaedro,  $120^\circ$  para el octaedro,  $36^\circ$  para el icosaedro y  $60^\circ$  para el dodecaedro.

*El lector notará que la existencia de la brecha es lo que permite la presencia de la convexidad en cada uno de los poliedros regulares convexos. Por ello, no puede haber más poliedros regulares convexos, puesto que al imponerse la restricción de que todas las caras sean iguales se establece el límite.*

Los poliedros regulares convexos tienen como caras idénticas participantes:

- triángulos equiláteros (el tetraedro, el octaedro y el icosaedro);
- cuadradas (el hexaedro);
- y pentagonales (el dodecaedro).

Ninguna otra opción existe. Sirva como ilustración que no puede existir un poliedro regular convexo con caras hexagonales, ya que en este caso los tres hexágonos que darían forma al potencial ángulo sólido, en el vértice potencial asociado de tal poliedro, contribuirían cada uno con un ángulo de  $120^\circ$ . En consecuencia, la suma de los tres ángulos participantes en

un vértice potencial sería igual a  $3 \times 120^\circ$ , esto es  $360^\circ$ . No existiría entonces la brecha, que es lo que asegura la convexidad. Se llega entonces a la conclusión de que al no existir la brecha, al elegir caras fuera de las ya consideradas (triángulos equiláteros, caras cuadradas y caras pentagonales), no puede existir un ángulo sólido asociado y con ello tampoco puede existir la convexidad. No, no existen más poliedros regulares convexos aparte de los conocidos.

Lo que viene de exponerse es en esencia la argumentación central de Euclides en los *Elementos*, que, como se ha expresado antes, aunque válida, carece del rigor del resto de las demostraciones incluidas en ese tratado. En particular, el argumento *riguroso* en torno a la significación de la brecha depende de una declaración propuesta y demostrada por primera vez por el filósofo racionalista francés René Descartes en su obra escrita en 1630 en latín *Progymnasmata de Solidorum Elementis* (en español: *Ejercicios para los elementos de los sólidos*) y que se conoce hoy a partir de una copia manuscrita elaborada por el coinventor del cálculo Gottfried Wilhelm Leibniz en París en 1670. En esa obra, René Descartes demostró de manera rigurosa que cada uno de los cinco poliedros regulares satisfacen una propiedad común: *la suma de las brechas para el total de los vértices aplastados es igual a ocho veces  $90^\circ$ , es decir,  $720^\circ$* . Por ejemplo, en el caso del hexaedro se tienen 8 ángulos sólidos y para cada uno de ellos, como se ha visto (figura 16), la brecha —a la que René Descartes denominó *defecto*— vale  $90^\circ$ . Así con el resto de los poliedros. Se suele afirmar que la declaración de René Descartes fue la primera contribución significativa en Europa a la geometría desde la escritura por Euclides de los *Elementos*. Esto es, se requirieron alrededor de dos mil años para cerrar la brecha abierta por Euclides.

Es oportuno mencionar que René Descartes es el pionero en el enfoque moderno de la interrelación entre la geometría y el álgebra, lo cual está plasmado en su obra escrita en francés *La Géométrie*, publicada en 1637 como uno de los apéndices de su tratado principal, el *Discurso del método*, considerado en el ámbito de la filosofía el pilar fundamental del pensamiento racionalista. Incluyo en el recuadro 36 una breve exposición sobre dicho tratado.

**Recuadro 36.** René Descartes y el *Discurso del método*

El *Discurso del método*, con el celebre subtítulo *Para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias*, es sin lugar a dudas uno de los textos fundamentales de la filosofía occidental, en cuyo panteón el francés René Descartes ocupa un lugar de excepción. A la luz de lo que le había acontecido a Galileo Galilei por la publicación de su obra *Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo* (publicada en Florencia en italiano en 1632), por lo que fue condenado a arresto domiciliario en 1633 como resultado del proceso por desobediencia que lanzó en su contra la Iglesia católica por decisión del papa Urbano VIII, René Descartes publicó en francés su obra principal de manera anónima en Leiden, Países Bajos, en 1637. Protegido por el anonimato, en su texto René Descartes sentó las bases del racionalismo moderno, también denominado justamente *cartesianismo*. Aunque René Descartes buscó con ahínco reconciliar a la ciencia con la religión, su obra intelectual contribuyó al colapso del pensamiento escolástico sobre el cual descansaba la autoridad eclesiástica, y con ello al surgimiento de la ciencia moderna, profundamente racionalista. Los apéndices del *Discurso del método* (a saber: *Dióptrica*, *Meteoros* y *Geometría*) fueron concebidos por René Descartes como ensayos ilustrativos del método de indagación racional propuesto, que hereda el enfoque axiomático expuesto en los *Elementos* de Euclides. Se puede decir en consecuencia que la construcción del racionalismo cartesiano utiliza el andamiaje intelectual de Euclides. En efecto, los cuatro preceptos racionalistas que René Descartes se impone como reglas del método (a saber: *no dé algo por verdadero hasta que su mente no lo haya asimilado de antemano de manera clara y distintiva; divida cada una de las dificultades para examinarlas y resolverlas mejor; establezca un orden de pensamientos, comenzando con los objetos más simples hasta los más complejos y diversos, y así manténgalos todos en orden; pase revista a todo lo visto para que no omitir algo*) pueden ser interpretados como los axiomas del racionalismo cartesiano.

Una vez revisado el tratamiento de Euclides, en lo que sigue presentaré una demostración formal moderna de la declaración matemática que concierne al capítulo presente. Espero que el lector me perdone el atrevimiento. Antes de abordarla me parece pertinente mencionar que existen varias demostraciones en torno a la existencia de únicamente cinco poliedros regulares convexos, todas ellas equivalentes. Podría decirse que cada una de ellas expresa de cierta manera el espíritu de los tiempos en los que fue elaborada, esto es, el *zeitgeist*, como les agrada decirlo a los lectores de la filosofía alemana de los siglos XVIII y XIX. Decidí entonces incluir aquí una demostración basada en la teoría de grafos, inscrita en el espíritu de nuestros tiempos, por lo que de manera previa a la presentación de la demostración haré una revisión breve de ésta. Como alternativa se podría tomar en cuenta una demostración con base en el uso del aprendizaje de máquina; es decir, podría concebirse un programa de cómputo “inteligente” capaz de aprender lo que define a un poliedro regular convexo en el universo de la geometría y después hacerlo navegar en éste para hallar todos los que satisfacen la definición. El proceso de navegación tomaría la forma de la resolución de un problema de optimización matemática. No tengo duda de que una alternativa algorítmica es realizable. Sin embargo, ésta nos alejaría de los territorios abstractos que estamos explorando en este libro.

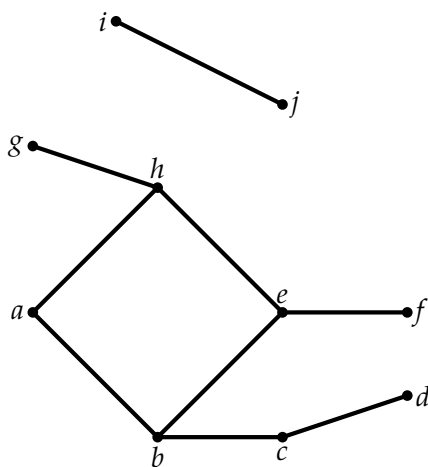
Tanto mi exposición en torno a la teoría de grafos, así como la demostración que presentaré, tienen como fuente principal de información el curso dado en 2010 en el Instituto de Tecnología de Massachusetts por el profesor Tom Leighton asistido para ello por Marten van Dijk, que versa sobre las matemáticas en las ciencias del cómputo. Las notas de dicho curso, escritas en inglés, se encuentran libremente disponibles en el enlace <https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/>. Pasemos entonces a nuestra siguiente sección.

## BREVIARIO DE LA TEORÍA DE GRAFOS

La demostración que decidí incluir en este capítulo sobre los poliedros regulares convexos se basa en la teoría de grafos, cuyos orígenes expongo de manera sucinta en el recuadro 37. La razón de mi elección radica esencialmente en mostrar cómo una problema planteado originalmente en términos geométricos, derivados del estudio de cuerpos sólidos, puede ser resuelto mediante una reformulación abstracta que sólo involucra el estudio de asociaciones de datos, así como de ciertas restricciones de naturaleza algebraica que les están asociadas. Esta es una orientación cada vez más presente en las matemáticas contemporáneas, que han visto consolidarse en consecuencia la *teoría de categorías*, a la cual le dedico algunos comentarios en el recuadro 38 (p. 202).

Antes de presentar la demostración expondré de manera breve los conceptos básicos requeridos de la teoría de grafos.

Considere la figura 17, que muestra las dos clases de elementos que constituyen a los grafos: *vértices* y *aristas*. Se representa a los vértices como

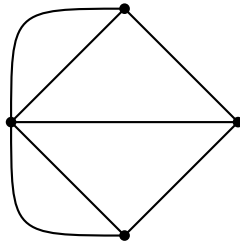


**Figura 17.** Un grafo simple

La figura muestra un grafo simple consistente en 10 vértices  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$  y 9 aristas.

**Recuadro 37.** Teoría de grafos

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas dedicada al estudio de redes de puntos conectados por medio de líneas. Nació con la solución por el matemático suizo Leonhard Euler al *Problema de los puentes de Königsberg*, publicada en las Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín en 1735, bajo el título en latín *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (esto es en español: *La solución de un problema relacionado con la geometría de la posición*). El problema concebido por Leonhard Euler consistía en encontrar un camino sobre cada uno de los siete puentes que cruzan un río bifurcado que pasa por una isla, pero sin cruzar ningún puente dos veces. Para su demostración utilizó *únicamente* referencias a la disposición física de los puentes, tal y como se muestra en el grafo siguiente:



que representa a los puentes por medio de las líneas que unen a los puntos, los cuales a su vez representan los sitios desde los cuales se puede acceder a los puentes. Leonhard Euler estableció formalmente que el problema no tenía solución, ya que las restricciones impuestas lo impiden. Hoy en día la teoría de grafos permite abstraer numerosos problemas que conciernen a la relación entre datos y las interacciones entre ellos, explorando las restricciones que las dominan, lo cual es de suma importancia en la *economía matemática*, en el funcionamiento de internet, en la biología teórica (por ejemplo, para el estudio de las redes de regulación genética) y en la ciencia de datos, por dar algunos casos de aplicaciones actuales de esta rama de las matemáticas.

**Recuadro 38.** Teoría de categorías, grafos y datos

La teoría de categorías nació a mediados de los años cuarenta del siglo pasado en el contexto del esfuerzo de los matemáticos estadounidenses Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane para establecer puentes entre la topología –dedicada al estudio de objetos geométricos invariantes ante transformaciones continuas– y el álgebra. Su objetivo inicial fue explotar conocimiento algebraico preexistente en la indagación de las propiedades estructurales de objetos topológicos, para lo cual los métodos topológicos implicaban una gran complejidad, si es que acaso existían. Se denomina categoría a un grafo dirigido etiquetado, cuyos nodos son denominados objetos y cuyas aristas son denominadas flechas, comprendidas como procesos que conectan a los objetos preservando su estructura. La idea básica de la teoría de categorías es identificar las relaciones que puentean categorías diferentes y que permiten que demostraciones matemáticas válidas para una determinada categoría lo sigan siendo para la otra. Los puentes que permiten esto se denominan *funtores*. Teóricos en matemáticas computacionales han establecido que todo esquema de una base de datos –esto es, la estructura que representa a la base en términos de la organización de los datos y cómo se asocian las relaciones entre ellos– es de hecho una categoría. Esto ha permitido explotar métodos matemáticos derivados del estudio de objetos topológicos (y de otros entornos matemáticos), en el desarrollo de herramientas informáticas que simplifican el cuestionamiento eficaz de lo que informa lo almacenado en las bases de datos. Una de las ventajas más importantes de este enfoque radica en que plantea la posibilidad de abandonar algunos enfoques heurísticos que siguen dominando hasta ahora a la denominada *ciencia de los datos*, para darle una fundación matemáticamente robusta.

los elementos de un conjunto (los puntos en la imagen de la figura 17), digamos  $V$ :

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\},$$

al igual que a las aristas, digamos  $A$ :

$$A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, e\}, \{e, f\}, \{e, h\}, \{a, h\}, \{g, h\}, \{i, j\}\}.$$

Tomando en cuenta estos dos conjuntos se tiene la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 16 (Grafo simple).** *Objeto matemático,  $G = (V, A)$ , que consiste en un conjunto no vacío de vértices  $V$  y un conjunto asociado de aristas  $A$ , formado a su vez por subconjuntos de dos elementos de  $V$ .*

Note que dado que no se impone una relación de ordenamiento en el conjunto de vértices y en el de aristas, conjuntos tales como  $\{a, b\}$  y  $\{b, a\}$  representan a la misma arista.

Una de las propiedades importantes que concierne a los grafos es la que cuantifica el número de aristas conectadas a un vértice:

**DEFINICIÓN 17 (Grado de un vértice).** *Se dice que dos vértices en un grafo simple son adyacentes si están conectados por medio de una arista (se dice entonces que una arista es incidente a los vértices que une). El número de aristas incidentes a un vértice dado, digamos  $v$ , es denominado el grado del vértice y se denota como  $\deg(v)$ , lo cual es equivalente al número de vértices que son adyacentes a  $v$ .*

**EJEMPLO 14.** *Para ilustrar la definición precedente, note que para el grafo simple que se muestra en la figura 17 se tiene que*

$$\deg(a) = 2, \deg(b) = 3, \deg(d) = 1. \quad \blacksquare$$

Para un grafo dado, existe una asociación entre la suma de los grados de un grafo y el número de aristas, lo cual se enuncia mediante la declaración siguiente, cuya demostración es por demás obvia:

**LEMA 1 (Lema del saludo de manos).** *La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual a dos veces el número de aristas.*

Asociados a los grafos existen los conceptos de caminatas y de rutas:

**DEFINICIÓN 18** (Caminatas y rutas). *Una caminata en un grafo, digamos  $G$ , es una secuencia de vértices:*

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

*y de aristas:*

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$$

*tales que  $\{v_i, v_{i+1}\}$  es una arista de  $G$  y la longitud de la caminata se define como  $k$ ; esto es, el número de aristas recorridas. Una arista, digamos  $\{u, v\}$ , es recorrida  $n$  veces por la caminata si existen  $n$  diferentes valores de  $i$  tales que  $\{v_i, v_{i+1}\} = \{u, v\}$ . Una ruta es una caminata en la cual todos los vértices son diferentes, es decir,  $i \neq j$  implica que  $v_i \neq v_j$ .*

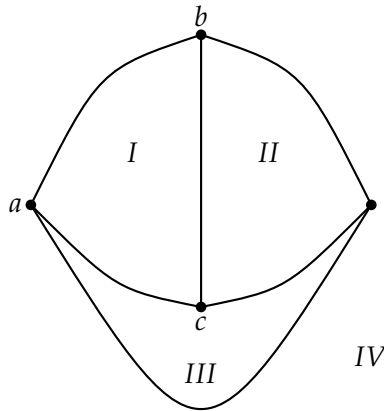
Se puede ahora definir lo que se entiende por grafo conectado.

**DEFINICIÓN 19** (Grafo conectado). *Se dice que dos vértices de un grafo están conectados si existe una ruta que comienza en uno de ellos y termina en el otro. Se considera por convención que todo vértice está conectado a sí mismo mediante una ruta de longitud igual a cero. Se dice que un grafo está conectado cuando todo par de vértices está conectado.*

Las definiciones precedentes corresponden a métricas asociadas a grafos, esto es, indicadores cuantitativos que permiten distinguir a un grafo dado de otros. El conjunto de los números que definen a una métrica específica pueden ser explotados con fines estadísticos, aunque su interés más importante consiste en su empleo para elucidar las restricciones de naturaleza algebraica que subyacen a las estructuras de la información que conllevan los grafos, entendidos como medio de representación de éstos.

Tomando en cuenta las definiciones precedentes, existen diversas clases de grafos, y la que concierne a la declaración matemática aquí considerada es la clase de los grafos planares, cuya definición se presentará una vez que se defina lo que se entiende por *dibujo de un grafo en un plano*.

**DEFINICIÓN 20** (Dibujo de un grafo en un plano). *El dibujo de un grafo en un plano consiste en asignar vértices a distintos puntos en el plano y en asignar aristas a curvas suaves que no se intersecan en el plano, y cuyos puntos terminales son los nodos incidentes de la arista correspondiente. Se dice que el dibujo es*



**Figura 18.** Dibujo planar de un grafo

La figura muestra el dibujo planar de un grafo con cuatro caras continuas. La cara *IV* se extiende al infinito en todas direcciones y es denominada la cara exterior. Las caras *I*, *II* y *III* son las caras interiores.

*planar si únicamente los puntos que aparecen en más de una curva corresponden a puntos vértice.*

Entonces:

**DEFINICIÓN 21 (Grafo planar).** *Es un grafo que tiene un dibujo en un plano.*

En el dibujo de un grafo en un plano las curvas que corresponden a las aristas dividen al plano en regiones conectadas. Estas regiones son denominadas *caras continuas* del dibujo, y cada una de tales regiones corresponde a una ruta cerrada en el grafo. En la figura 18 se ilustra el dibujo planar de un grafo que contiene cuatro caras continuas: tres interiores y la cara exterior. En dicha figura se puede apreciar que cada una de las regiones está asociada a un conjunto de vértices que definen una ruta cerrada.

**EJEMPLO 15.** *Para el dibujo planar del grafo mostrado en la figura 18, la región *I* está asociada a los vértices *a*, *b* y *c*, que en tal caso definen la ruta cerrada denotada como *abca*. Este objeto matemático discreto corresponde a la cara continua *I*.* ■

La definición de grafo planar y su asociación con rutas cerradas lleva a la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 22** (Caras discretas del dibujo de un grafo en el plano). *Son las rutas cerradas en el grafo dibujado.*

Gracias a la asociación entre caras continuas de un grafo en un plano y las rutas cerradas que las acotan se tiene una manera de caracterizar al dibujo del grafo en el plano por medio del concepto de *grafo conectado incrustado en un plano*:

**DEFINICIÓN 23** (Grafo conectado incrustado en un plano). *Es el conjunto no vacío de las caminatas cerradas, que reciben el nombre de caras discretas de la incrustación. Los incrustamientos planares están definidos de manera recursiva como sigue:*

**CASO BASE:** Si  $G$  es un grafo que posee un solo vértice  $v$ , entonces la incrustación de  $G$  en el plano tiene una cara discreta, esto es, la caminata cerrada de longitud igual a cero  $v$ .

**CASO DEL CONSTRUCTOR (DIVISIÓN DE UNA CARA):** Suponga que  $G$  es un grafo conectado con un incrustamiento planar y también que  $a$  y  $b$  son vértices no adyacentes distintos de  $G$  que aparecen en alguna cara discreta  $\gamma$  del grafo incrustado en el plano. Esto es,  $\gamma$  es una caminata cerrada de la forma:

$$a \dots b \dots a.$$

Similarmente, sea  $b$  un vértice sobre una cara discreta, digamos  $\delta$ , en el incrustamiento de  $H$ . Por lo tanto,  $\delta$  es de la forma:

$$b \dots b.$$

Entonces el grafo que se obtiene al agregar una arista  $\{a.b\}$  a las aristas de  $G$  tiene una incrustación planar con las mismas caras discretas de  $G$ , excepto que  $\gamma$  es reemplazada por las dos caras discretas:

$$a \dots ba \text{ y } ab \dots a.$$

**CASO DEL CONSTRUCTOR (ADICIÓN DE UN PUENTE):** Suponga que  $G$  y  $H$  son grafos conectados con incrustaciones planares y con conjuntos de vértices

disjuntos. Sea  $a$  un vértice sobre una cara discreta, digamos  $\gamma$ , en el incrustamiento de  $G$ ; es decir,  $\gamma$  tiene la forma:

$$a \dots a.$$

Entonces el grafo que se obtiene al conectar  $G$  y  $H$  utilizando una nueva arista,  $\{a, b\}$ , tiene un incrustamiento planar cuyas caras discretas son la unión de las caras discretas de  $G$  y de  $H$ , exceptuando que las caras  $\gamma$  y  $\delta$  son remplazadas por una nueva cara:

$$a \dots ab \dots ba.$$

Una de las propiedades más básicas de un grafo conectado es la que establece que el número de caras en cada posible incrustación planar está determinado por el número de sus vértices y de sus aristas. Esta propiedad recibe el nombre de *fórmula de Euler*, que se presenta a continuación como un teorema:

**TEOREMA 1 (Fórmula de Euler).** *Si un grafo conectado posee una incrustación planar, entonces:*

$$v - a + c = 2,$$

donde

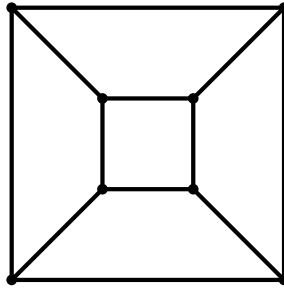
- $v$  denota el número de vértices;
- $a$  denota el número de aristas;
- $c$  denota el número de caras.

En lo que sigue me serviré de este enunciado, cuya demostración está fuera de los alcances de este libro.

Una vez introducido el herramental requerido de la teoría de grafos, se puede abordar la demostración de la declaración matemática que concluye este capítulo: *sólo existen cinco poliedros regulares convexos.*

**DEMOSTRACIÓN:**

Suponga que se toma cualquiera de los poliedros regulares convexos y se coloca en el interior de una esfera. Se podrían entonces proyectar las fronteras de las caras del poliedro sobre la esfera, lo cual daría



**Figura 19.** Hexaedro incrustado en el plano

La figura muestra el grafo planar que resulta al incrustar el hexaedro.

lugar a un grafo planar incrustado sobre la esfera, con las imágenes de las esquinas de los poliedros correspondiendo a los vértices del grafo. Entonces se puede utilizar la fórmula de Euler para explorar las *restricciones estructurales que definen a los poliedros*.

La figura 19 muestra como un ejemplo ilustrativo el grafo planar que resulta al incrustar el hexaedro.

Sea entonces  $m$  el número de caras que se encuentran en cada esquina de un poliedro y sea  $n$  el número de aristas de cada cara. En el grafo planar correspondiente se tienen  $m$  aristas incidentes a cada uno de los vértices  $v$ . Por el *lema del saludo de manos* se sabe que

$$m \times v = 2 \times a.$$

Asimismo, cada cara del poliedro está acotada por  $n$  aristas. Debido a que cada arista está en la frontera de dos caras se tiene que

$$n \times c = 2 \times a.$$

Resolviendo para  $v$  y para  $c$  en estas dos ecuaciones y sustituyendo en la fórmula de Euler se tiene:

$$\frac{2 \times a}{m} - a + \frac{2 \times a}{n} = 2,$$

lo cual se convierte en

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}.$$

Esta igualdad restringe entonces la estructura que puede tener un poliedro. El problema de demostrar que existen sólo cinco poliedros regulares convexos ha llevado a la exploración de los conjuntos de números enteros que satisfacen la igualdad precedente; es decir, a la determinación de los valores de los números enteros:

- $m$ , que denota el número de caras;
- $n$ , que denota el número de aristas en cada cara;
- $a$ , que denota el número total de aristas en el poliedro.

Dado que todo polígono tiene al menos 3 lados, se tiene que  $n \geq 3$ . Además, al menos 3 polígonos deben encontrarse en una esquina para generar un ángulo sólido en un poliedro. Esto significa que  $m \geq 3$ . Por otro lado, si  $n$  o  $m$  tuvieran un valor igual o mayor a 6 se tendría:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

que es menor al valor del lado derecho de la igualdad. En consecuencia tienen las restricciones algebraicas en los valores de  $n$  y de  $m$  dadas por las desigualdades siguientes:

$$3 \leq n \leq 5$$

y

$$3 \leq m \leq 5.$$

Las posibles combinaciones de valores de  $n$  y de  $m$ , escritas como pares  $\{n, m\}$ , están entonces dadas por

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 3\}, \{5, 5\}$$

Tomando el primer conjunto, esto es,  $\{3, 3\}$ , se tiene que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

que, de acuerdo con la igualdad precedente, debe igualar a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2},$$

que da lugar al número total de aristas:

$$a = 6.$$

En consecuencia, el número de vértices  $v$  es igual a

$$2 \times a/m = 2 \times 6/3 = 4$$

y el número de caras está dado por

$$c = 2 \times a/n = 2 \times 6/3 = 4$$

Esta solución corresponde evidentemente al tetraedro. Con el mismo procedimiento se pueden explorar todas las opciones para el restante número de 6 conjuntos, tomando en cuenta en cada caso las restricciones asociadas. Al finalizar el análisis, resulta que sólo otros 4 poliedros regulares satisfacen la igualdad derivada de la fórmula de Euler. De esta manera, para cada combinación válida de  $n$  y de  $m$  se pueden computar, utilizando la igualdad, el número asociado de vértices  $v$ , de aristas  $a$  y de caras  $c$ . Esto da lugar a la tabla siguiente:

| SOLUCIÓN | $n$ | $m$ | $v$ | $a$ | $c$ |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 3   | 3   | 4   | 6   | 4   |
| 2        | 4   | 3   | 8   | 12  | 6   |
| 3        | 3   | 4   | 6   | 12  | 8   |
| 4        | 3   | 5   | 12  | 30  | 20  |
| 5        | 5   | 3   | 20  | 30  | 12  |

Estas cinco soluciones corresponden justamente a los cinco poliedros regulares convexos:

SOLUCIÓN 1: tetraedro.

SOLUCIÓN 2: hexaedro.

SOLUCIÓN 3: octaedro.

SOLUCIÓN 4: icosaedro.

SOLUCIÓN 5: dodecaedro.

Los conjuntos  $\{n, m\}$  dados por  $\{4, 5\}$  y  $\{5, 5\}$  dan lugar al número  $a = -20$  para el primer conjunto y al número  $a = -10$  para el segundo, lo cual no tiene sentido. Se concluye entonces que no pueden existir poliedros regulares convexos fuera de los cinco ya conocidos. De esta manera finaliza la demostración.  $\square$

La declaración matemática que se ha demostrado en este capítulo posee sin lugar a dudas una de las historias más impresionantes del mundo de las matemáticas. Junto con la no racionalidad de la raíz cuadrada de 2, la existencia del dodecaedro fue, de acuerdo con la tradición, el otro secreto guardado por los pitagóricos. La elección de este poliedro regular convexo por parte de Platón para representar el universo influyó en el interés de los matemáticos que, como Euclides, llegarían a demostrar que forma parte de los únicos cinco poliedros regulares convexos que existen.

Para terminar este capítulo, abordaré a continuación lo que se ha dado en llamar el dislate geométrico de Johannes Kepler. Al redactar este escrito tuve la idea de servirme de ese famoso error al recordar su exposición y análisis por parte del planetólogo estadounidense Carl Sagan en el capítulo 3 de su famosa serie televisiva de divulgación científica *Cosmos: un viaje personal*, producida por la televisora pública de California, Estados Unidos, KCET a fines de los años setenta del siglo pasado y emitida por el Servicio Público de Radiodifusión de los Estados Unidos (PBS por sus siglas en inglés) en 1980. En mis tiempos de estudiante de preparatoria disfruté mucho de esta serie televisiva y fue un gran estímulo al elegir dedicarme profesionalmente a la ciencia.

## EL DISLATE GEOMÉTRICO DE JOHANNES KEPLER

El interés de los matemáticos por los poliedros regulares convexos alcanzó una de sus cumbres en la propuesta del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, quien a fines del siglo XVI explicó *erróneamente* el porqué del número de planetas en el Sistema Solar, así como las relaciones entre sus diámetros orbitales. Esto lo hizo en términos de un modelo que incluía una compleja anidación de esferas, así como los cinco sólidos platónicos. En el modelo cosmográfico de Johannes Kepler, publicado en

1597 en su obra escrita en latín *Mysterium Cosmographicum* (en español: *El misterio cosmo gráfico*), cada esfera representa una órbita planetaria y cada órbita circunscribe uno de los sólidos. De esa manera los cinco sólidos platónicos funcionan como espaciadores entre las órbitas planetarias. Johannes Kepler asoció entonces a

- Mercurio con el icosaedro;
- Venus con el octaedro;
- la Tierra con el dodecaedro;
- Marte con el tetraedro;
- Júpiter con el cubo.

La esfera que contenía la composición planteada representaba a Saturno, pues en tiempos de Johannes Kepler estos seis planetas eran los únicos que se conocían. El descubrimiento de Urano se le acredita hoy en día al astrónomo y compositor británico de origen alemán William Herschel, quien lo observó por primera vez el 13 de marzo de 1781, utilizando para ello un telescopio de su propia construcción. En cuanto al planeta Neptuno, su descubrimiento es uno de los logros más notables de la capacidad predictiva del conocimiento matemático de los fenómenos naturales. En efecto, este planeta fue descubierto *mediante cálculos matemáticos* por el astrónomo francés Urbain Le Verrier. Esto ocurrió a fines del mes de agosto de 1846 al analizar las irregularidades en la órbita de Urano que se desprendían de la información obtenida mediante el uso de observaciones astronómicas. Las irregularidades detectadas se explicaban al agregar a la descripción matemática, derivada de la aplicación de la teoría gravitacional de Isaac Newton, la presencia de un planeta con las características del que después recibiría el nombre de Neptuno. La verificación observacional de la existencia del planeta que perturba a Urano fue realizada por el astrónomo alemán Johann Gottfried Galle, asistido por su estudiante Heinrich Louis d'Arrest, en la noche del 23 al 24 de septiembre de ese mismo año, en el Observatorio de Berlín. Hoy en día se considera que el Sistema Solar sólo posee ocho planetas, ya que

Plutón fue desclasificado por la Unión Astronómica Internacional el 13 de septiembre del año 2006.

Es evidente que el modelo cosmográfico de Johannes Kepler está inspirado en las ideas de Platón expresadas en el *Timeo*. Su esfuerzo por darle sentido a la información observacional disponible, necesariamente incompleta, utilizando para ello el limitado instrumental que él mismo había ayudado a desarrollar con base en un esfuerzo intelectual por demás extraordinario, es un ejemplo magnífico de la imperiosa necesidad humana por descubrir los principios que rigen la realidad en la cual transcurre nuestra existencia. Johannes Kepler es uno de mis personajes científicos favoritos. Su determinación de las leyes del movimiento celeste a partir de los datos astronómicos que recibió del astrónomo danés Tycho Brahe constituyen un logro magnífico de la ciencia. El no poder compaginar su modelo matemático —que residía en la consideración de que las órbitas heliocéntricas de los planetas eran circulares— con los datos astronómicos, lo llevaron a considerar órbitas elípticas y con ello a descubrir la naturaleza del movimiento de los planetas y abrir así la puerta por la que luego entraría Isaac Newton en la Gran Historia de la Ciencia. La realidad se le impuso a Johannes Kepler sobre sus preconcepciones de corte eminentemente religioso, lo cual todavía le sigue siendo difícil a muchos científicos.

Para terminar este capítulo cabe aquí un cuestionamiento final:

*¿Qué es lo que ha hecho tan atractivos a los poliedros regulares convexos?*

Resulta obvio el interés estético que poseen estos objetos matemáticos. Prueba de ello son las famosas ilustraciones que el legendario Leonardo da Vinci realizó para el libro *De divina proportione* (en español: *La proporción divina*), publicado en 1509 por el matemático italiano Luca Pacioli. En nuestro tiempos los poliedros regulares, convexos o no, siguen siendo motivo de interés estético en el ámbito de la arquitectura. Sin embargo, quizás la respuesta al cuestionamiento planteado radica en lo sorprendente que resulta para muchos el que una verdad matemática (¿formal?) sea literalmente tangible, pues lo más intrigante de los poliedros regulares convexos es que se les pueda dar una presencia como objetos físicos y no únicamente como entidades abstractas del mundo de las

matemáticas. Esta asociación tangible entre lo abstracto y lo material es tan seductora hoy en día como lo fue en la Antigua Grecia para Platón y para Euclides y en el siglo xvii para Johannes Kepler. Más aún, las matemáticas poseen como una de sus cualidades principales la de constituir un territorio en el que se pretende explorar lo absoluto, esto es, un territorio donde algunos pretenden hallar verdades incuestionables. La asociación entre matemáticas y verdad es un tema frecuente en el ámbito de la filosofía de las matemáticas, y todavía queda mucho que pensar en torno a esto, tal y como lo expongo en el recuadro 39. Quizás el aspecto más complejo de este asunto radique en la paradoja de buscar la validación de perspectivas centradas en aceptar la existencia de lo verdadero en un dominio de la actividad de la mente definido por la dominancia a ultranza de las restricciones. ¿Por qué esto es paradójico? Porque en las matemáticas el ejercicio del razonamiento deductivo requiere el uso libre, crítico y *entrenado* de la mente, para evitar las trampas que vienen con las creencias, no siempre erróneas, y así elucidar las restricciones que definen a los objetos matemáticos.

*La búsqueda libre de la verdad es un prerrequisito para poner a la luz de nuestra comprensión la falta de libertad que define al fenómeno matemático.*

Como he expuesto en la demostración con base en la aplicación de la teoría de grafos, la existencia debidamente probada de que hay únicamente cinco poliedros regulares convexos constituye una verdad absoluta, ni más ni menos. Está verdad se deriva directamente de la restricción algebraica impuesta por la fórmula de Euler. La creencia de Platón a fin de cuentas resultó cierta, aunque la certeza sólo se alcanzó con la primera demostración debida a Euclides. Sin embargo, la creencia de Johannes Kepler —que él consideró cierta debido a la certeza alcanzada por Euclides— resultó falsa. Invito al lector a continuar esta reflexión con la suya propia.

Es tiempo de presentar el último teorema seleccionado en este libro: *la obra maestra de Arquímedes*, el postre con el que concluirá el banquete.

**Recuadro 39.** La naturaleza de la verdad matemática

A diferencia del conocimiento científico normativo, el cual posee una temporalidad incierta, el conocimiento matemático permanece inalterable una vez que han sido demostrados los teoremas que lo sustentan. Es esta característica la que ha llevado a cuestionar la naturaleza de la verdad matemática. ¿Quién debe dar respuesta? Algunos consideran que los matemáticos y otros asignan la tarea a la filosofía, para la cual la verdad ha sido siempre uno de sus grandes temas de reflexión. Desde la perspectiva filosófica y siguiendo el enfoque del filósofo prusiano del siglo XVIII Immanuel Kant, se aprecian dos clases de verdad: la de adecuación y la de interpretación. La primera se refiere al acuerdo del pensamiento consigo mismo o con algo que le es exterior, la segunda concierne la búsqueda de sentido. La clase de verdad que se suele asociar con lo matemático atañe a la de adecuación, y ésta se divide en dos tipos: la empírica material y la formal. Dado que los objetos matemáticos no son objetos de la experiencia, la verdad en matemáticas no es de adecuación material empírica, por lo que sólo quedaría la verdad formal, esto es, la que deriva de un conjunto de axiomas. Sin embargo, muchos en la comunidad matemática creen en los objetos matemáticos como objetos reales *ideales*, por lo que no aceptan la naturaleza formal de la verdad matemática como un puro resultado de los alcances y de las limitaciones del lenguaje, en el sentido postulado en la primera mitad del siglo XX por el filósofo austriaco Ludwig Josef Johann Wittgenstein. Además, a esto hay que agregar que la complejidad de las demostraciones matemáticas contemporáneas (la del último teorema de Fermat por Andrew Wiles, por dar un ejemplo pertinente), involucra la participación de árbitros, lo cual introduce necesariamente el factor político propio de las disputas sociales por el poder en el ámbito de la ciencia y de la academia. Esto implica forzosamente la emergencia de lo político en la definición de la verdad matemática. Esto inaugura sin duda un nuevo debate, sin visos de alcanzarse fácilmente el consenso dentro de la comunidad matemática.



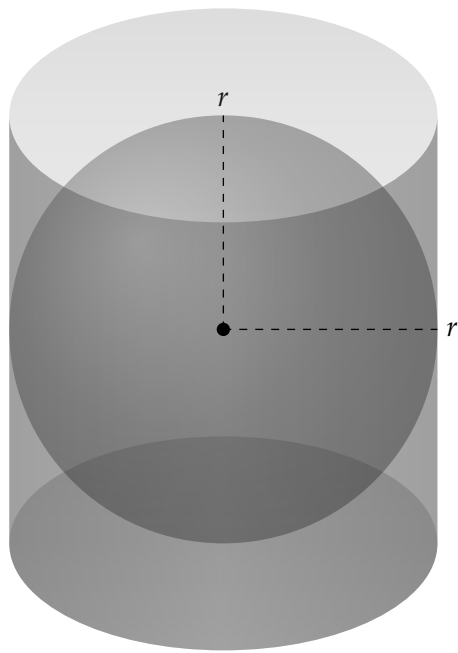
## Teorema 10. Una esfera tiene dos tercios del volumen del cilindro en que se inscribe

Marco Tulio Cicerón, celebre escritor, hombre de estado y en su momento miembro del senado romano, en su texto escrito en latín *Tusculanae Disputationes* (conocido en el mundo hispano como *Disputaciones tusculanas*), publicado hacia el año 45 a.C., describe su visita a lo que él juzgó como la tumba del legendario ingeniero, físico y matemático Arquímedes de Siracusa. Según Cicerón, en esa tumba él habría hallado una escultura consistente en una esfera y un cilindro, aunque no especifica en su escrito la configuración de lo que halló. En su relato, Cicerón afirma haber solicitado a sus acompañantes locales que limpiaran la tumba eliminando la hierba acumulada.<sup>26</sup> Según lo reportado un siglo más tarde por el ciudadano romano de origen griego Plutarco, en su texto del año 75 d.C. dedicado a la biografía del conquistador de Siracusa, el comandante romano Marcus Claudius Marcellus, Arquímedes estaba tan orgulloso de su demostración a la declaración que concierne al presente capítulo, que habría solicitado a sus amigos que decoraran a manera de epitafio su tumba con una escultura alusiva.

Con base en lo escrito por Cicerón y Plutarco, se suele afirmar que para Arquímedes la demostración de que una esfera tiene dos tercios del volumen del cilindro en el que se inscribe fue su logro favorito. Como lo he indicado precedentemente, Arquímedes incluyó la demostración en

---

<sup>26</sup> Dado el poco aprecio que los romanos tuvieron por los aspectos teóricos de las matemáticas, se ha llegado a afirmar que la única contribución del Imperio romano a las matemáticas fue ese acto de limpieza de la tumba de Arquímedes reportado por Cicerón, si es que eso pasó realmente, lo cual es de dudarse.



**Figura 20.** Esfera inscrita en un cilindro

La imagen que se muestra en esta figura corresponde al objeto geométrico constituido por una esfera de radio  $r$  inscrita en un cilindro de radio también igual a  $r$  y de altura  $2 \times r$ .

su tratado *Sobre el cilindro y la esfera*,<sup>27</sup> que es considerado por muchos su *obra maestra* en lo que respecta a sus exploraciones en el ámbito de la geometría. En el recuadro 40 he incluido una reseña sucinta de lo que se entiende por obra maestra en el contexto de las matemáticas, un concepto que, de hecho, tiene mucho que ver con Arquímedes.

Debido a la importancia que se le ha dado en la historia de las matemáticas, decidí dedicar este capítulo final al resultado de Arquímedes, con el fin de honrar una vez más su memoria y rendirle así homenaje, y quizás también porque aún queda en la comunidad matemática algo del

<sup>27</sup> Los tratados de Arquímedes, además de *Sobre el cilindro y la esfera*, incluyen *La medición del círculo*; *Sobre conoides y esferoides*; *Sobre las espirales*; *Centros de gravedad de los planos*; *Cuadratura de la parábola*; *El contador de arena*; *El método de los teoremas mecánicos*; *Sobre los cuerpos que flotan*.

**Recuadro 40.** La noción de obra maestra en matemáticas

La noción de *obra maestra* proviene de la Europa de fines de la Edad Media y se asocia con el requerimiento que tenía el artesano de elaborar una pieza que demostrara la excelencia en la práctica de su oficio para ser admitido en el gremio respectivo, con lo cual obtenía la acreditación de *maestro*. Durante el siglo XIX, bajo la influencia del Romanticismo, la noción se ancló en el ámbito del arte (esencialmente en Francia), correspondiéndole a críticos especializados y reconocidos la calificación de la obra, en sustitución de la certificación corporativa. Más allá del éxito comercial de un artista, la caracterización de una de sus piezas como obra maestra está asociada hoy en día a la evaluación por parte de expertos y no depende de la apreciación del público. En el contexto de las matemáticas el concepto de obra maestra es difícil de establecer, sobre todo en esta época que ha visto un crecimiento extraordinario en la complejidad de los problemas que interesan a los matemáticos. A diferencia del arte, los únicos calificados para considerar una pieza matemática (es decir, la demostración de un teorema o de un conjunto de ellos) son también matemáticos. El reconocimiento del mérito recuerda entonces el esquema seguido a fines de la Edad Media para acreditar a los artesanos como maestros. En cierto sentido, las obras maestras matemáticas son hoy en día comisiones solicitadas por la propia comunidad matemática a sus miembros para legitimar su pertenencia al gremio matemático. Esto explica la importancia que se le da en la comunidad matemática a la resolución de problemas matemáticos difíciles que han planteado integrantes consagrados. Este sería el caso con el listado de problemas propuesto por David Hilbert, en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en París, Francia, en el año 1900. Algunos matemáticos irreflexivos se complacen en afirmar que su quehacer hace de ellos una suerte de artistas, sobre todo algunos de entre ellos que cultivan las matemáticas adjetivadas como *puras*. El análisis sociológico muestra que estarían más cerca de ser artesanos. Esto escrito sin ninguna connotación peyorativa.

Romanticismo individualista nacido en Europa a finales del siglo XVIII en oposición a los ideales del Siglo de las Luces. Las matemáticas son quizás el campo de la ciencia que más ha promovido y cultivado el individualismo entre sus creadores, y por ello los nombres de individuos notables como Arquímedes se han mantenido en la memoria colectiva durante siglos. Cabe mencionar que el anverso de la Medalla Fields, el máximo reconocimiento que la comunidad matemática internacional le otorga a sus miembros más destacados, muestra precisamente un bajo relieve que representa el rostro de Arquímedes, así como su nombre en griego y la frase en latín:

*Transire suum pectus mundoque potiri,*

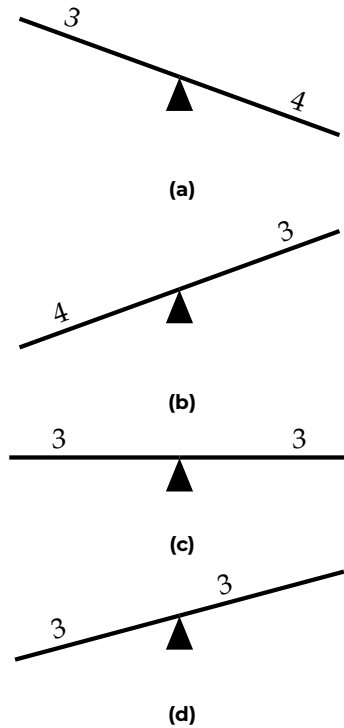
que se traduce al español como *Ir más allá de uno mismo y dominar el mundo*. En el reverso de la medalla se muestra la esfera inscrita en el cilindro junto con la frase en latín:

*Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere,*

que se traduce al español como *Los matemáticos de todo el mundo se reunieron para dar esta medalla por escritos excelentes*. Esto muestra el respeto que los matemáticos tienen por la memoria de sus héroes, así como el peso tanto del individualismo como del reconocimiento basado en la competencia, características dominantes de la dinámica social en Occidente. Todavía queda mucho por hacer para cambiar estos esquemas sociales a fin de dar cauce a enfoques menos individualistas y más basados en la colaboración.

Para proceder a la demostración es importante recordar que Arquímedes no fue únicamente matemático, sino también uno de los pioneros de la física matemática y asimismo ingeniero. Esto es muy importante, ya que es la combinación de sus talentos prodigiosos lo que permitió a Arquímedes realizar la demostración. El geómetra griego Papo de Alejandría (quien vivió hacia el siglo IV de nuestra era), cita en su obra publicada hacia el año 340, *Synagoge*, del griego antiguo Συναγωγή (que se traduce como *Colección*), la famosa frase:

*¡Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo!*



**Figura 21.** El principio de la palanca

La figura muestra de manera esquemática el *principio de la palanca*. Se representa la barra rígida mediante una línea horizontal, que puede girar libremente sobre el plano en torno a un punto de apoyo colocado justo a la mitad de la barra. Las fuerzas aplicadas a los brazos de palanca se representan mediante números enteros. En (a) y (b) se muestra el desequilibrio causado por la diferencia entre fuerzas aplicadas de magnitudes distintas sobre puntos equidistantes del punto de apoyo. En (c) se muestra una circunstancia de equilibrio debida a fuerzas idénticas aplicadas en puntos equidistantes del punto de apoyo y en (d) lo que acontece cuando se aplican fuerzas idénticas aunque en puntos no equidistantes del punto de apoyo.

En esta frase está implícito el conocido *principio de la palanca*, del cual se sirve Arquímedes en la demostración de la declaración que concierne a este capítulo, la cual utiliza conceptos provenientes de la mecánica. El principio de la palanca, que se ilustra en la figura 21, se resume mediante la igualdad que especifica bajo qué condiciones la barra está en equilibrio,

a saber: cuando no se desplaza angularmente alrededor de su punto de apoyo:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

donde, siguiendo lo mostrado en la figura 21:

- $d_1$  representa la distancia del punto donde se coloca la masa  $m_1$  al punto de apoyo;
- $d_2$  representa la distancia del punto donde se coloca la masa  $m_2$  al punto de apoyo.

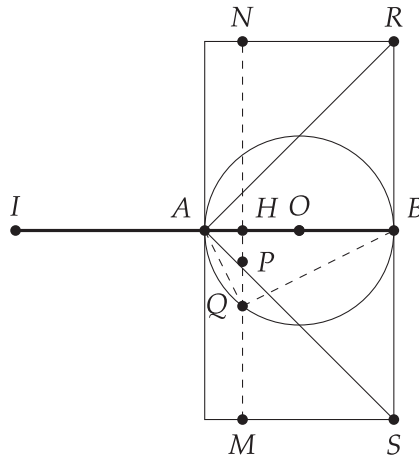
Procedo ahora con la última demostración de este libro, para lo cual seguiré la metodología de Arquímedes, e inspirado en el estilo expuesto por el especialista francés en la pedagogía de las matemáticas Vincent Pantaloni, en <http://prof.pantaloni.free.fr/spip.php?article132>.

#### DEMOSTRACIÓN:

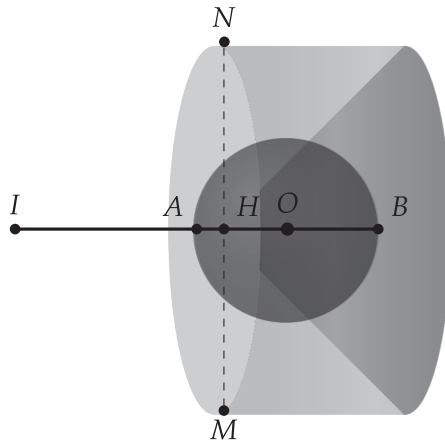
En la figura 22 se muestra la metodología geométrica propuesta por Arquímedes, que se basa en la comparación de los volúmenes de los sólidos de rotación que resultan al hacer rotar el rectángulo, el círculo y el triángulo mostrados en la figura 22-(a). Dichos sólidos se muestran en la figura 22-(b). La comparación parte del corte que se hace a lo largo de la recta  $\overline{MN}$  y que resulta en tres discos como resultado de la rotación. Se obtienen entonces tres rebanadas de espesor infinitamente pequeño, una para la esfera, otra para el cilindro y una más para el cono. En cada caso el volumen de la rebanada es proporcional a la superficie de su base, lo cual se traduce en que son proporcionales a

- $\overline{HP}^2$  para la rebanada del cono;
- $\overline{HQ}^2$  para la rebanada de la esfera;
- $\overline{HM}^2$  para la rebanada del cilindro.

La gran idea de Arquímedes en torno a la comparación de los volúmenes consiste entonces en hallar una relación entre estas tres cantidades. Para ello se utiliza una propiedad muy conocida de los



(a)



(b)

**Figura 22.** Método de Arquímedes

En (a) el punto  $A$  está a la mitad de  $\overline{IB}$ . El rectángulo es un doble cuadrado;  $\overline{RB}$  y  $\overline{BS}$  son iguales e igualan al diámetro del círculo centrado en el punto  $O$ . En (b) se muestran los cuerpos sólidos que resultan al hacer girar alrededor del eje  $\overline{IB}$  el rectángulo, el círculo y el triángulo  $\triangle ARS$ .

triángulos semejantes. Como puede verse en la figura 22-(a), los triángulos  $\triangle AHQ$  y  $\triangle AQB$  son semejantes, esto es, poseen los mismos ángulos.

En consecuencia:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}},$$

de lo cual resulta que

$$\overline{AH} \times \overline{AB} = \overline{AQ} \times \overline{AQ} = \overline{AQ}^2.$$

Considerando el triángulo  $\triangle AHQ$  y tomando en cuenta el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\overline{AQ}^2 = \overline{HQ}^2 + \overline{AH}^2,$$

por lo cual

$$\overline{AH} \times \overline{AB} = \overline{HQ}^2 + \overline{AH}^2.$$

Debido a que el triángulo  $\triangle AHP$  es isósceles, se tiene que

$$\overline{AH} = \overline{HP}.$$

En consecuencia:

$$\overline{AH} \times \overline{AB} = \overline{HQ}^2 + \overline{HP}^2.$$

Partiendo de esta igualdad, Arquímedes propone servirse de la perspectiva mecánica utilizando una palanca, cuyo punto de apoyo está en  $A$ . Siguiendo esta idea, se toman los brazos de palanca  $\overline{AI}$  y  $\overline{AH}$ .

Se calcula entonces la razón:

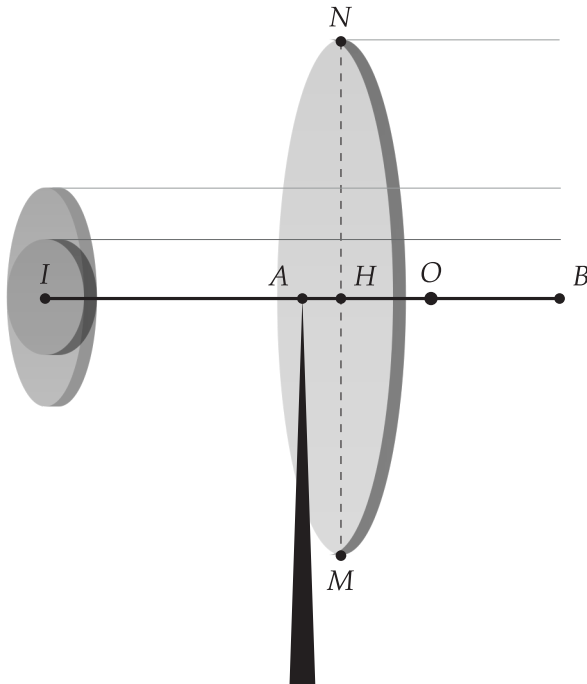
$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}}.$$

Multiplicando y dividiendo el lado de la derecha de esta igualdad por  $\overline{HM}$  se llega a lo siguiente:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HM} \times \overline{HM}}{\overline{AH} \times \overline{HM}} = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{AH} \times \overline{HM}}.$$

Esto es:

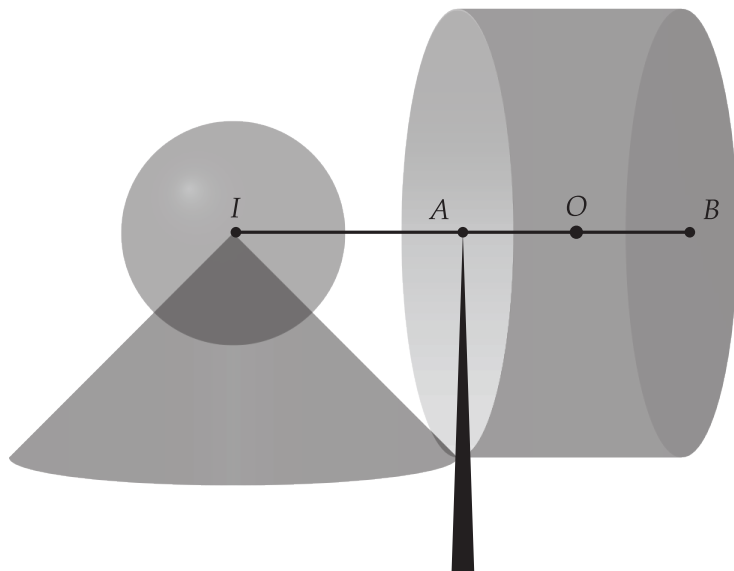
$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{HQ}^2 + \overline{HP}^2},$$



**Figura 23.** Equilibrio en el método de Arquímedes – cortes infinitesimales  
Las rebanadas resultantes de la partición a lo largo de la recta  $\overline{MN}$  en la figura 22 se equilibran como se muestra en esta imagen.

que se interpreta ahora en términos de palancas comparándola con  $d_2/d_1 = m_1/m_2$ .

En términos de esta interpretación *mecánica*, las rebanadas resultantes del corte se equilibran si se las coloca como se muestra en la figura 23. Tomando en cuenta ahora todas las rebanadas que resultan al variar el corte según  $\overline{MN}$  con el punto  $H$  recorriendo todo el segmento  $\overline{AB}$  se llega a la situación de equilibrio que se describe en la figura 24: la esfera y el cono se sujetan al punto fijo  $I$ , mientras que el cilindro se sujeta a su centro de gravedad  $O$ , que se encuentra a la mitad del segmento  $\overline{AB}$ . Se puede reordenar esta situación de equilibrio tal y como se indica en la figura 25 (p. 227).



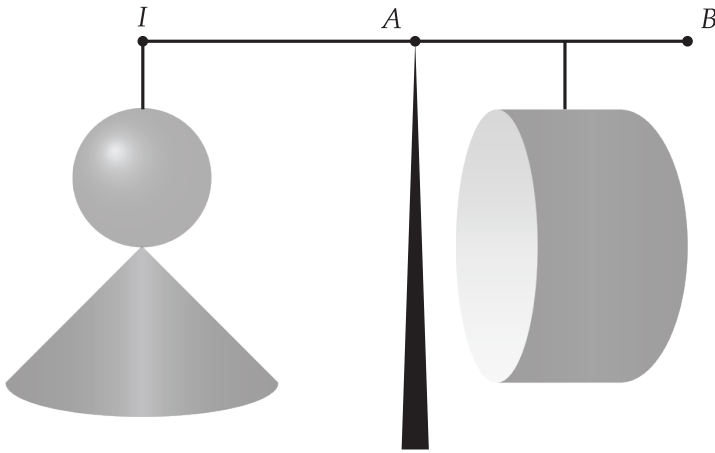
**Figura 24.** Equilibrio en el método de Arquímedes – sólidos equilibrados  
En esta imagen se ilustra lo que resulta al variar el corte según  $\overline{MN}$  con el punto  $H$  recorriendo todo el segmento  $\overline{AB}$  (véanse las figuras 22 y 23).

Dado que

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{OA}} = 2,$$

resulta que la masa del cilindro vale entonces dos veces la masa del cono agregada a la masa de la esfera. Para llegar al resultado que asocia al cilindro con la esfera inscrita, se aprovecha el hecho de que si se duplica el radio de un cilindro sin cambiar su altura se multiplica por cuatro el volumen del cilindro. En consecuencia, el cilindro de la figura 24:

- tiene cuatro veces el volumen del cilindro en el cual se inscribe la esfera;
- iguala a dos veces el volumen de la esfera adicionado a dos veces el volumen del cono.



**Figura 25.** Equilibrio en el método de Arquímedes – reordenamiento de los sólidos equilibrados  
Reordenamiento de los cuerpos sólidos mostrados en la figura 24.

En lo que sigue se denota:

- volumen del cono:  $\text{vol}(\text{cono})$ ;
- volumen del cilindro en el cual está inscrita la esfera:  $\text{vol}(\text{cilindro})$ ;
- volumen de la esfera:  $\text{vol}(\text{esfera})$ .

Para proseguir con la demostración, se tiene que Arquímedes sabía que el volumen de un cono es igual a un tercio del volumen de un cilindro de igual radio y de igual altura. Esto significa que

$$3 \times \text{vol}(\text{cono}) = 2 \times \text{vol}(\text{esfera}) + 2 \times \text{vol}(\text{cono}).$$

Lo cual implica que

$$\text{vol}(\text{cono}) = 2 \times \text{vol}(\text{esfera}).$$

O equivalentemente:

$$3 \times \text{vol}(\text{cono}) = 6 \times \text{vol}(\text{esfera}).$$

Esto es:

$$4 \times \text{vol}(\text{cilindro}) = 6 \times \text{vol}(\text{esfera}).$$

Lo cual lleva a

$$2 \times \text{vol}(\text{cilindro}) = 3 \times \text{vol}(\text{esfera}),$$

o

$$\frac{2}{3} \text{vol}(\text{cilindro}) = \text{vol}(\text{esfera}),$$

y así finaliza la demostración. □

La demostración que se ha presentado ilustra el ingenio portentoso de Arquímedes, que sigue sorprendiendo miles de años después de su muerte.

Su empleo del *principio de la palanca* se inscribe en lo que se denominan hoy en día *métodos mecánicos*, una particularidad del estilo de Arquímedes, algo así como su sello personal.

En este caso, la utilización del principio de la palanca le permitió demostrar la declaración sin requerir del cómputo de los volúmenes del cilindro y de la esfera, lo cual necesita del conocimiento del número  $\pi$ . Además, de manera muy hábil Arquímedes se sirvió en la demostración del concepto de infinitesimal, que no sería totalmente formalizado hasta el siglo XVII por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz con la invención del *cálculo*.

Para comparar, en la sección siguiente incluyo una demostración que se caracteriza por su falta de elegancia.

#### DEMOSTRACIÓN CARENTE DE ELEGANCIA

Cuando se conocen por adelantado los volúmenes del cilindro y de la esfera, la demostración del teorema es trivial, *aunque carente totalmente de elegancia*. En efecto, hoy en día se sabe que el volumen de la esfera de radio igual a  $r$  está dado por

$$\frac{4}{3}\pi \times r^3.$$

En cuanto al volumen del cilindro cuya base tiene como radio a  $r$  y como altura a  $2 \times r$ , éste se computa como sigue:

$$\pi \times r^2 \times 2 \times r = 2 \times \pi \times r^3,$$

que también se puede expresar como

$$\frac{6}{3} \times \pi \times r^3.$$

Fraccionando esta cantidad, resulta que el volumen del cilindro está dado por

$$\underbrace{\frac{2}{3} \times \pi \times r^3 + \frac{2}{3} \times \pi \times r^3 + \frac{2}{3} \times \pi \times r^3}_{\text{volumen de la esfera}}.$$

Lo cual significa que la esfera inscrita en el cilindro tiene un volumen igual a dos tercios del volumen del referido cilindro, es decir, dos tercios del volumen del cilindro igualan al volumen de la esfera que le está inscrita, tal y como lo afirma el teorema. ¿Cuál de las dos demostraciones prefiere el lector? En mi caso la versión de Arquímedes me parece mucho más interesante, pues requiere como punto de partida de menos información que la segunda. Este, de hecho, suele ser un principio de selección al abordar la demostración de una declaración matemática.

Conviene notar que una misma declaración matemática puede tener más de una demostración válida. Esto lleva necesariamente a preguntar sobre los criterios que rigen los modos específicos de razonamiento que se eligen para abordar la demostración de una declaración matemática específica, así como el papel que desempeña la percepción en el razonamiento de índole matemática. Abordo este asunto a continuación.

## PERCEPCIÓN DE LA REALIDAD Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Como suele suceder en muchos casos, el camino que se sigue para llegar a un destino no es único y muchas veces lo que importa es precisamente el camino y no el destino. Como afirmó Buda Gautama (ca. 563-483 a.C.-483-368 a.C.):

*El camino es la felicidad.*

Considere los versos en francés del poema *Sensation*, que el poeta francés Arthur Rimbaud escribió en marzo de 1870, a los 16 años:

*Par les soirs bleus d'été, j'irai dans les sentiers,  
Picoté par les blés, fouler l'herbe menue :  
Rêveur, j'en sentirai la fraîcheur à mes pieds.  
Je laisserai le vent baigner ma tête nue.*

*Je ne parlerai pas, je ne penserai rien :  
Mais l'amour infini me montera dans l'âme,  
Et j'irai loin, bien loin, comme un bohémien,  
Par la Nature, – heureux comme avec une femme*

y que me permito traducir libremente al español como sigue, plenamente consciente de la dificultad que implica la traducción de poesía de su lengua de origen, acotada por sus circunstancias, a otra lengua, bajo otras circunstancias:

### Sensación

*En los azules atardeceres del verano, me iré por los senderos,  
picoteado por el trigo, pisaré la hierba apenas crecida:  
soñador, sentiré su frescura bajo mis pies.  
Dejaré que el viento recorra mi cabeza desnuda.*

*No hablaré ni pensaré nada,  
pero el amor infinito embargará mi alma,  
y me iré lejos, muy lejos, como un gitano,  
feliz, por la naturaleza, como en compañía de una mujer.*

La construcción del conocimiento matemático puede ser un acto puramente racional, enfocado a alcanzar una meta perfectamente definida y recorriendo sin distracciones el camino más corto. Sin embargo, también puede ser un camino en el cual lo que importa es lo que se siente al recorrerlo. La ruta que siguió Arquímedes para construir la demostración que se ha presentado y a la que él mismo consideró como su obra

maestra –en el sentido al que me he referido en el recuadro 40 (p. 219)–, resume una época específica en la historia de las matemáticas. Una época iniciada con la sistematización del razonamiento hipotético-deductivo por parte de Euclides en los *Elementos* y concluida por Arquímedes, el ingeniero, al combinar la intuición mecanicista adquirida en el proceso de diseño de artefactos prácticos, con la perspectiva geométrica que caracterizó la forma de ser del conocimiento matemático de la Antigua Grecia. A través de su demostración Arquímedes mostró el placer que se siente al tomar derroteros inesperados. El principio de la palanca, que Arquímedes formalizó en términos matemáticos, no sólo captura una propiedad mecánica, sino que también representa la manifestación cognitiva del uso no sólo de la percepción sensorial sino también de la apropiación sensual de la realidad. Metafóricamente hablando, Arquímedes recorrió los senderos del conocimiento y fue muy lejos y se permitió entregarse a su deseo y con ello a lo que Arthur Rimbaud reconoció como la Naturaleza, formada no sólo por lo que está ahí sin nosotros, sino que también nos incluye, sin dejar fuera nuestros razonamientos por más abstractos y racionales que puedan ser.

Con esto finalizo este capítulo, sólo me resta en lo que sigue hacer algunos comentarios generales y presentar algunas referencias bibliográficas que pueden servirle al lector para complementar lo que he expuesto a todo lo largo de este volumen.



## Comentarios finales

He recorrido en este volumen un camino que invita a practicar el razonamiento bajo las restricciones que impone la construcción del conocimiento matemático. Ese ha sido mi objetivo desde el principio. Siento que ha sido un buen viaje, quizás sólo un tramo de una ruta más extensa. Partí hacia mi destino comenzando con la reconstrucción de la anécdota infantil de un niño pobre que se hizo príncipe a sí mismo y que en su vejez gustaba contemplar desde su palacio las colinas que él mismo ajustó con regla y compás. Esas colinas pobladas de criaturas mínimas y celestiales nacidas de los sueños de los sabios de esa Grecia que no supo proteger a su sabio más crítico.

Así comenzó el viaje, y pienso que en la etapa final de éste prevaleció el gozo, aunque no sin cierto temor y quizás también bajo la presencia de una ligera ansiedad, de las delicias mecánicas del grandioso sabio de Siracusa. Para mi romántico infortunio, y acompañado de los lectores invitados, no me tocó quitar, embargado por la solemnidad, la legendaria hierba que dicen que ha recubierto la lápida que marca la tumba de ese sabio que fue también héroe y mago. No, no estuve ante esa legendaria piedra tallada que el vanidoso príncipe alemán tanto quiso imitar sin al final lograrlo.

Así comenzó y así terminó el viaje, aunque eso no fue todo, pues en el trayecto me consentí deteniéndome de tiempo en tiempo para dar cuenta del paisaje. Durante el recorrido que tuve escuché, embelesado, el canto de algunos números y dialogué con otros que se saben esenciales y que no aceptan someterse al escrutinio de la infausta factorización. También disfruté de la compañía de simpáticos números que gustan de las superficies y de los volúmenes y que, orgullosos, se niegan a ser vistos como simples fracciones de algo más. Asimismo, me entretuve verificando

que lo inconmensurable no sólo existe, de alguna manera no consensuada, sino que puede darle sustancia a familias de objetos que se dejan ir en la idealización del espacio físico. Fue grato hallarlos, y en un recodo del camino, el cual visité con sumo placer, me encontré para mi gran fortuna con la famosa banda platónica de los poliedros. Sí, a esos, los regulares y también convexos, los hallé en un buen día. Ellos, generosos hasta más no poder, me explicaron sin falsa modestia –como se debe hacer cuando se habla de lo cierto– por qué sólo hay cinco como ellos. Sólo cinco y ninguno más. Únicamente cinco. Agradecido los dejé divinamente entretenidos en torno a una fogata luminosa, platicando entre ellos sobre planetas y triángulos domesticados. Fue un buen encuentro.

Durante mi travesía me acompañaron algunos personajes excéntricos, y uno de ellos me entretuvo tocando con su monocordio la canción esa de la flor del árbol al que algunos denominan Capomo. Sí, fue muy extraño el paseo e incluso llegué a dudar de la existencia de lo real. Sí, estuvo muy agradable el paseo, aunque extrañé sobremanera la compañía femenina. Ya será para la próxima, y así haré honor a las sensaciones sublimes que me legó el adolescente aquel, ese ser apasionado y salvaje que huyó del frío de su pueblo. Eso haré en el próximo paseo.

Ha llegado, pues, el momento de despedirme, gustoso de haber compartido con ustedes mis experiencias, y como dicen con cariño los gitanos:

LATCHO DROM.

## Bibliografía recomendada

Como complemento a lo que he expuesto en este volumen, incluyo en este capítulo final algunas recomendaciones sobre fuentes bibliográficas de información que pienso le serán de interés al lector como material complementario. Aunque inicialmente tuve como objetivo privilegiar la inclusión de fuentes de información escritas exclusivamente en español, no me fue fácil lograrlo. Desafortunadamente, aún es escasa la literatura dedicada a la difusión del conocimiento matemático escrita en español, por lo que la mayoría del material bibliográfico que recomiendo aquí está escrito en inglés. Esto no es extraño, pues la cultura anglosajona domina en gran medida, a nivel mundial, la difusión del conocimiento científico, y el inglés se ha convertido durante el último siglo en la lengua franca de la ciencia. Además, es por demás obvio el desapego cultural que las naciones hispanoamericanas tienen hacia las matemáticas,<sup>1</sup> lo cual limita el desarrollo de la industria editorial asociada a la publicación del conocimiento matemático. Espero que esta situación cambie en el corto plazo; mientras tanto, no queda más que adaptarse.

---

<sup>1</sup> Para convencerse de esta aseveración, basta con revisar los reportes relativos a las habilidades matemáticas de los estudiantes de 15 años del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), elaborados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), de acuerdo con lo reportado en el año 2018, que mostró el predominio educativo asiático, todos los países latinoamericanos evaluados obtuvieron una clasificación inferior a la del promedio de países pertenecientes a la OCDE, siendo similar la situación de España. El reporte de 2018 colocó a España en el lugar 34 y a México en el lugar 61 de la clasificación. Uruguay, el país mejor clasificado de América Latina, ocupó el lugar 58. Seguramente se pueden emitir críticas justificadas a los modos de evaluación que subyacen a los reportes PISA, que asocian el desempeño educativo al desarrollo económico de corte neoliberal, aunque difícilmente se podrá argumentar que sus conclusiones estén equivocadas.

He dividido las recomendaciones bajo la forma de las siguientes secciones temáticas:

- Génesis del pensamiento matemático
- Métodos de demostración
- Demostraciones visuales
- Tratados de Euclides y de Arquímedes
- París, capital mundial de las matemáticas
- Matemáticas fuera de Occidente
- Sobre los poliedros
- Reflexión filosófica en la Antigua Grecia
- Notación matemática
- Matemáticas en las humanidades y en las artes
- Matemáticas y género
- En defensa de las matemáticas

Como el lector podrá notar, los temas elegidos están relacionados con el material que incluí en los cuadros a lo largo de este volumen. Para cada sección elegí al menos una referencia, evitando en lo posible incurrir en excesos. El lector juzgará.

#### GÉNESIS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La génesis del pensamiento matemático es un tema muy interesante y su estudio tiene importancia al abordar las circunstancias históricas y culturales que le están asociadas. El libro que recomiendo a continuación se inscribe en esa tendencia desde una perspectiva educativa orientada a estudiantes de diversos ámbitos, así como a maestros de matemáticas que desean estimular el gusto de sus alumnos a través de la resolución de problemas.

Steven G. Krantz (2010). *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture Through Problem Solving*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

## MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Para abordar desde una perspectiva básica los métodos de demostración que subyacen a la construcción de conocimiento matemático recomendamos el siguiente libro de publicación reciente. Este libro está orientado a estudiantes que inician apenas la educación universitaria en áreas de matemáticas, cómputo e ingenierías. El libro basa su método de exposición en el uso intensivo de ejercicios de demostración, siguiendo para ello la lógica que se sigue en la informática en el contexto de la así denominada *programación estructurada*.

Daniel J. Velleman (2019). *How to prove it: A structured approach (Third edition)*. Cambridge–Nueva York: Cambridge University Press.

El libro que recomiendo a continuación y que complementa la recomendación previa es en verdad muy interesante. Está concebido para estimular el pensamiento matemático en estudiantes que recién inician su formación universitaria *sin distinguir de áreas*. El libro prioriza la consolidación del razonamiento hipotético-deductivo mediante su aplicación a la resolución de ejercicios matemáticos no muy complicados. La manera como se presenta el material satisface criterios pedagógicos de diseño orientados a la educación basada en la reflexión del alumno.

Rocío Abascal Mena y Erick López Ornelas (2016). *Pensar en matemáticas*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Para quienes se sienten seguros con los desafíos que plantean los teoremas, los libros siguientes ofrecen un buen material para ejercitarse, pues pasa revista a demostraciones de resultados clásicos, incluyendo algunas demostraciones que han sido reconocidas por la comunidad matemática como obras maestras del conocimiento matemático.

William Dunham (1990). *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. Hoboken, Nueva Jersey: Wiley Science Editions, John Wiley & Sons.

Arthur Knoebel, Reinhard Laubenbacher, Jerry Lodder y David Pengelley (2007). *Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the Explorers*. Nueva York: Springer Science + Business Media.

Martin Aigner y Günther M. Ziegler (2018). *Proofs from THE BOOK (Sixth Edition)*. Berlín: Springer.

Complementariamente, el libro siguiente, que privilegia la lógica que subyace al desarrollo de las matemáticas modernas, está orientado a estudiantes que siguen una formación universitaria centrada de manera específica en las matemáticas.

Richard J. Rossi (2006). *Theorems, Corollaries, Lemma, and Methods of Proofs*. Hoboken, Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

#### DEMOSTRACIONES VISUALES

Para explorar demostraciones a declaraciones matemáticas que prescindan de palabras, el libro siguiente provee una gran colección.

Roger B. Nelsen (1997). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Un complemento a este libro, centrado en el entrenamiento de la percepción visual como herramienta de comprensión de las matemáticas básicas, es el siguiente. Pienso que este libro será del interés de especialistas en la enseñanza de las matemáticas.

Jessika Sobanski (2002). *Visual math: See How Math Makes Sense*. Nueva York: Learning Express.

#### TRATADOS DE EUCLIDES Y DE ARQUÍMEDES

Los *Elementos* de Euclides han sido publicados utilizando el lenguaje moderno de las matemáticas en la edición que recomiendo a continuación.

Euclides (2015). *Elementos*. Barcelona: Gredos.

En cuanto a los tratados de Arquímedes, estos están disponibles en la edición que recomiendo a continuación.

Reviel Netz (2009). *The Works of Archimedes: Translated into English, Together with Eutocius' Commentaries, with Commentary, and Critical Edition of the Diagrams*. Cambridge: Cambridge University Press.

## PARÍS, CAPITAL MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS

¿Cómo llegó París a constituirse en la *capital mundial de las matemáticas*? Francia es quizás el país más apegado culturalmente a las matemáticas.<sup>2</sup> El libro que recomiendo a continuación pasa revista a las circunstancias históricas y culturales que han moldeado durante medio milenio el desarrollo de las matemáticas en Francia. El material incluido en el libro ilustra de manera magnífica cómo el pensamiento matemático llega a formar parte de la autoconcepción de una nación moderna.

Marcel Berger (2005). *Cinq siècles de mathématiques en France*. París: Association pour la diffusion de la pensée française.

Esta obra se complementa con el libro siguiente, en el cual se analiza —desde la perspectiva de la sociología y de la historia del conocimiento científico— lo que caracteriza a las matemáticas como campo científico y las dinámicas socioculturales que lo determinan.

Pierre-Michel Menger y Pierre Verschueren (2023). *Le monde des mathématiques*. París: Seuil.

## MATEMÁTICAS FUERA DE OCCIDENTE

El estudio del conocimiento matemático fuera del mundo occidental es motivo actual de gran interés. El libro siguiente incluye una serie muy interesante de ensayos que abordan el tema.

Helaine Selin (ed.) (2000). *Mathematics Across Cultures: A History of Non-Western Mathematics*. Dordrecht-Boston-Londres: Kluwer Academic Publishers.

## SOBRE LOS POLIEDROS

Los poliedros son un tema que ha apasionado a los matemáticos a lo largo de mucho tiempo. El libro siguiente es la referencia obligada sobre este asunto.

---

<sup>2</sup> El apego social de Francia por las matemáticas se traduce en la obtención excepcional de once Medallas Fields por parte de graduados de la Escuela Normal Superior de París.

Peter R. Cromwell (1999). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.

#### REFLEXIÓN FILOSÓFICA EN LA ANTIGUA GRECIA

Platón ofrece una visión importante sobre los esquemas de razonamiento filosófico cultivados en la Antigua Grecia, por lo que hoy en día sus *Diálogos* siguen siendo una lectura obligada para toda persona interesada en la reflexión filosófica.

Platón (2012). *Diálogos*. México: Porrúa.

En cuanto al pensamiento pitagórico y su relación con lo metafísico, recomiendo el libro que listo a continuación.

Robert Hahn (2017). *The Metaphysics of the Pythagorean Theorem: Thales, Pythagoras, Engineering, Diagrams, and the Construction of the Cosmos out of Right Triangles*. Albany, Nueva York: SUNY Press,.

#### NOTACIÓN MATEMÁTICA

La historia del desarrollo de la notación en las matemáticas requiere tomar en cuenta la confluencia entre ciencia, cultura y tecnología. El libro que recomiendo a continuación ofrece material apasionante en torno a dicho tema.

Florian Cajori (1994). *A History of Mathematical Notations (Dover Books on Mathematics)*. Mineola, Nueva York: Dover Publications.

#### MATEMÁTICAS EN LAS HUMANIDADES Y EN LAS ARTES

En tiempos recientes se ha discutido en el ámbito de la pedagogía de las matemáticas cómo vencer las reticencias que han desarrollado personas inclinadas hacia las humanidades y las artes. El siguiente libro ofrece un tratamiento informal muy atractivo basado en ejercicios.

Peter Hilton, Derek Holton, Jean Pedersen (1997). *Mathematical Reflections: in a Room with Many Mirrors*. Nueva York: Springer.

## MATEMÁTICAS Y GÉNERO

Aunque publicado hace más de diez años, el libro que recomiendo a continuación explora las razones profundas que hoy en día siguen influyendo en el número reducido de mujeres dedicadas profesionalmente a tareas que exigen el dominio del conocimiento matemático.

Stephen J. Ceci y Wendy M. Williams (2009). *The Mathematics of Sex: How Biology and Society Conspire to Limit Talented Women and Girls*. Nueva York: Oxford University Press.

## EN DEFENSA DE LAS MATEMÁTICAS

Concluyo mis recomendaciones con un texto muy interesante que reflexiona sobre los errores que se cometen en la enseñanza de las matemáticas en los Estados Unidos. Pienso que el análisis del autor es pertinente también para el caso de los países donde se habla el español como lengua oficial. El texto aborda el estudio de las matemáticas desde una perspectiva estética y orientada a la resolución de problemas y defiende la esencia de las matemáticas entendidas como arte.

Paul Lockhart (2009). *A Mathematician's Lament*. Nueva York: Bellevue Literary Press.

Finalizo así mis recomendaciones, esperando sinceramente que sean de utilidad para el lector.



## Semblanza del autor

JUAN CARLOS MARTÍNEZ GARCÍA

Investigador apasionado por el control automático y sus aplicaciones. Obtuvo con máximos honores el doctorado en Teoría Matemática del Control Automático e Informática Aplicada por la Escuela Central de Nantes, Francia, en 1994. Previamente, se graduó como ingeniero mecánico electricista en la UNAM y completó una maestría en Ingeniería Eléctrica con especialidad en control automático en el Cinvestav-IPN.

Pertenece al Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores (SNI), nivel 3. Es profesor-investigador en el Departamento de Control Automático del Cinvestav. Sus líneas de investigación abarcan desde el análisis de robustez en sistemas dinámicos lineales y no lineales hasta la robótica, la biología sintética, el control cuántico, la biología de sistemas médicos –con énfasis en redes biomoleculares asociadas a la regulación genética de enfermedades crónico-degenerativas–, así como el estudio de los automatismos en sistemas socioculturales.

Ha sido investigador invitado en instituciones de prestigio, como la Academia de Ciencias de la República Checa, el CNRS en Francia y la Universidad de la República en Uruguay, además de ser *Sabbatical Fellow* en Harvard y UC Berkeley, en los Estados Unidos. Como docente, ha compartido su conocimiento en la UNAM, el IPN, la Universidad Iberoamericana y el ITAM.



## Índice de figuras

|    |                                                                   |     |
|----|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 1  | La <i>tetraktys</i>                                               | 15  |
| 2  | Postulado de las paralelas                                        | 92  |
| 3  | Raíz cuadrada de 2                                                | 122 |
| 4  | Teorema de Pitágoras                                              | 130 |
| 5  | Demostración visual del teorema de Pitágoras                      | 134 |
| 6  | Triángulo rectángulo isósceles                                    | 145 |
| 7  | 300 dígitos de $\pi$                                              | 151 |
| 8  | Media geométrica                                                  | 155 |
| 9  | La quinta perfecta y el monocordio                                | 163 |
| 10 | Separación entre <i>do</i> y <i>sol</i> en el piano               | 164 |
| 11 | <i>Coccinella septempunctata</i>                                  | 181 |
| 12 | Triángulo en geometría euclidiana - 1                             | 185 |
| 13 | Triángulo en geometría euclidiana - 2                             | 186 |
| 14 | Cuatro poliedros para cuatro elementos de la naturaleza           | 191 |
| 15 | Dodecaedro                                                        | 192 |
| 16 | Vértice del hexaedro                                              | 195 |
| 17 | Un grafo simple                                                   | 200 |
| 18 | Dibujo planar de un grafo                                         | 205 |
| 19 | Hexaedro incrustado en el plano                                   | 208 |
| 20 | Esfera inscrita en un cilindro                                    | 218 |
| 21 | El principio de la palanca                                        | 221 |
| 22 | Método de Arquímedes                                              | 223 |
| 23 | Equilibrio en el método de Arquímedes - cortes<br>infinitesimales | 225 |

|    |                                                                                    |     |
|----|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 24 | Equilibrio en el método de Arquímedes - sólidos equilibrados                       | 226 |
| 25 | Equilibrio en el método de Arquímedes - reordenamiento de los sólidos equilibrados | 227 |

# Índice de recuadros

|    |                                                                        |     |
|----|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1  | ¿La emergencia de los números irracionales como revolución científica? | 17  |
| 2  | Herramientas de edición y tipográficas utilizadas                      | 21  |
| 3  | Las matemáticas y la tentación mística                                 | 30  |
| 4  | Las matemáticas como profesión                                         | 33  |
| 5  | Grigori Perelman y la geopolítica                                      | 41  |
| 6  | Matemáticas y asuntos de género                                        | 52  |
| 7  | La pasión de Sofía Kovalévskaya                                        | 55  |
| 8  | ¿Qué es la ciencia?                                                    | 58  |
| 9  | Sistemas formales y lógica                                             | 62  |
| 10 | La perniciosa influencia del mecanicismo newtoniano                    | 65  |
| 11 | La elección por la geometría en la Antigua Grecia                      | 72  |
| 12 | Nicolas Bourbaki                                                       | 76  |
| 13 | Tales de Mileto, el pionero                                            | 79  |
| 14 | Teoremas y razonamiento hipotético-deductivo                           | 81  |
| 15 | La elegancia matemática                                                | 85  |
| 16 | Las matemáticas y el sentido de los números                            | 95  |
| 17 | Tradiciones, notaciones y tipografía                                   | 100 |
| 18 | Representando el término de una demostración                           | 103 |
| 19 | Cinematografía y matemáticas                                           | 108 |
| 20 | El buen ordenamiento                                                   | 115 |
| 21 | Principio de no contradicción                                          | 117 |
| 22 | Límites y métodos infinitesimales                                      | 121 |
| 23 | La revolución de los irracionales                                      | 125 |
| 24 | Formación académica de los matemáticos                                 | 126 |

|    |                                                |     |
|----|------------------------------------------------|-----|
| 25 | Adolescencia y matemáticas                     | 135 |
| 26 | El teorema de Pitágoras fuera de Occidente     | 136 |
| 27 | Cantidades inconmensurables                    | 144 |
| 28 | $\pi$                                          | 147 |
| 29 | Realismo matemático                            | 150 |
| 30 | Percepción y propiedades de la música          | 162 |
| 31 | Geometría y música en la Antigua Grecia        | 165 |
| 32 | Orígenes de los nombres de las notas musicales | 167 |
| 33 | El número 1 no es primo                        | 175 |
| 34 | Invariancia en matemáticas                     | 184 |
| 35 | Los elementos de la naturaleza                 | 194 |
| 36 | René Descartes y el <i>Discurso del método</i> | 198 |
| 37 | Teoría de grafos                               | 201 |
| 38 | Teoría de categorías, grafos y datos           | 202 |
| 39 | La naturaleza de la verdad matemática          | 215 |
| 40 | La noción de obra maestra en matemáticas       | 219 |

# Índice de materias

- Academia de Atenas, 194
- adolescencia, 133, 135
- Alejandro, 12, 49, 120
- American Mathematical Society, 53
- Ancien Régime, 30
- Antigua Grecia, 12, 15, 17, 63, 68, 69, 72, 78, 79, 117, 119, 121, 125, 143, 146, 147, 155, 157, 161, 163, 165, 168, 177, 193, 214, 231, 236, 240
- Antiguo Colegio de San Ildefonso, 51
- Antiguo Egipto, 72, 79
- arcoíris
  - los siete colores del, 181
- aritmética
  - teorema fundamental de la, 18, 70, 171, 173, 176, 177
- Arquímedes, 18, 19, 34, 35, 72, 121, 147, 214, 220-231
  - los tratados de, 218, 236, 238
  - muerte de, 37, 38
  - tumba de, 70, 217
- Auschwitz
  - campo de concentración de, 39
- axioma, 18, 115, 137, 138, 186, 187
  - definición de, 79
- batalla de Trafalgar, 35
- BOINC, 177, 178
- Bourbaki, Nicolas, 75, 76
  - Elementos de matemática*, 76
- Bryn Mawr
  - universidad privada femenina de, 50, 53
- cálculo, 74, 121, 126, 149, 197, 228
- campo social, 31, 32, 35, 48, 49, 51, 85
- capital, 31
  - cultural, 31
  - económico, 31
  - simbólico, 24, 31
- catarina, 180, 181
- cateto, 16, 69, 120, 122, 129, 130, 139, 145
- Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 54
- ChatGPT, 131, 132
- ciencia de los datos, 202
- ciencia física, 162
  - matematización de la, 65
- cigarras periódicas, 179, 180
- cinematografía, 107, 108
- círculo, 69, 90, 91, 146, 147, 155, 222, 223
- círculo perfecto, 148

- Ciudad de México, 7, 8, 44, 51, 129, 130
- clases de objetos matemáticos, 74, 144, 171, 184
- composición musical, 18, 161, 167, 168
- cómputo, 72, 94, 96-98, 107, 132, 147, 177-179, 199, 228, 237
- matemáticas en las ciencias del, 199
- tecnología electromecánica del, 49
- teoría del, 56
- teoría matemática del, 179
- Comuna de París, 55
- Congreso Internacional de Matemáticas, 39, 219
- conjetura
- definición de, 78
- conocimiento matemático, 9-13, 19, 24, 27, 29, 30, 33, 39, 40, 47, 49, 62, 67, 70, 71, 73-76, 79-81, 85, 93, 97, 120, 125, 131, 133, 143, 150, 161, 212, 215, 230, 231, 233, 235, 237, 239, 241
- definición de, 77
- convexidad, 192, 196, 197
- corolario, definición de, 80
- cosmovisión, 189-191, 194
- cosmovisión platónica, 192
- cubo, 212
- Dào Dé Jīng*, 194
- declaraciones matemáticas, 56, 66, 69, 71-73, 79, 80, 83, 95, 119, 188
- demonstraciones visuales de las, 133, 134, 238
- métodos de demostración de las, 81, 82
- Dedekind, corte de, 141, 142, 144, 146
- demonstración constructiva, 82, 83
- demonstración por contradicción, 82, 116, 117, 120, 121, 123, 124
- demonstración por contraejemplos, 82, 83
- demonstración por inducción, 82, 83, 103
- demonstración sin palabras, 82, 83
- Descartes, René, 63, 198
- Geometría* (tratado), 197
- Diálogos de Platón
- Timeo*, 189, 191, 192, 213
- dimensión, 89
- Disquisitiones arithmeticae* (Gauss), 171
- dodecaedro, 190, 192, 194, 196, 210-212
- dominación masculina, 23, 54
- economía matemática, 61, 201
- Egipto Antiguo, 36, 136, 156
- élitros, 180, 181
- emotividad, 46
- Enciclopedia Británica, 19
- epistemología matemática, 138
- Erlangen, Universidad de, 50
- Escuela Doméstica*, 51
- Escuela Nacional de Maestros, 51
- Escuela Nacional Preparatoria, 51, 53
- Escuela Normal de Maestros, 53
- escuela pitagórica, 15, 125
- Escuela Politécnica Federal de Lausana, 51
- espacio físico, 89, 188, 234
- Estocolmo, Universidad de, 55
- estrategias de dominación social, 44

- estructura algebraica, 86
- Euclides, 165, 195, 199, 211, 214, 236
  - Elementos* de, 12, 64, 70, 72, 89, 91, 103, 117, 120, 129, 134, 155, 171, 186, 193, 197, 198, 231, 238
  - lema de, 176
  - quinto postulado de, 18, 91, 92, 186-188
- Euler, Leonhard, 34, 201
  - fórmula de, 207, 208, 210, 214
- expansionismo europeo, 65, 100
- factorización, 171-174, 233
- falsabilidad, 58, 62
- Fields, Medalla, 39-41, 43, 50, 51, 76, 129, 220, 239
- fracciones, 12, 68, 69, 109-111, 119, 139, 162, 233
- fracción irreducible, 111
- física moderna
  - pilares de la, 188
- Galois, Évariste
  - muerte de, 38
- geometría, 12, 71-74, 89, 120, 126, 131, 132, 143, 165, 169, 189, 193, 197, 199, 201, 218
  - Geometría* (Descartes), 198
  - geometría algebraica, 39, 75
  - geometría euclidiana, 18, 70, 90, 139, 182-186, 188
  - geometría no euclidiana, 187, 188
  - geometría plana, 134
  - geopolítica, 41
- Gotinga, Universidad de, 41, 49, 50, 55, 101
- grafo
  - caminatas y rutas en un, 204
  - conectado, 206, 207
    - definición de, 204
  - grado de un vértice en un, 203
  - longitud de una ruta en, 204
  - simple, 200
    - definición de, 203
- grafos
  - teoría de, 199, 201
- gravitación universal
  - ley de la, 64
- grupo
  - estructura algebraica, 86
- Guerra Civil Española, 39
- Guerra Civil Rusa, 39
- habitus*, 31, 32, 34, 36, 43, 44, 51
- hexaedro, 190, 191, 195-197, 208, 210
- hipotenusa, 16, 69, 120, 122, 129, 130, 139, 144, 145
- historia de las matemáticas, 12, 18, 36, 42, 48, 53, 119, 125, 218, 231
- hydraulis*, 169
- icosaedro, 190, 191, 196, 210, 212
- Ilustración, 14, 63, 65
- imaginario social, 27, 37, 42-47, 51, 52, 54, 177
- Imperio romano, 120, 169, 182, 217
- India Antigua, 194
- infinitesimal, 121, 228
- influenza
  - pandemia de los años 1889-1890, 55
- información, teoría de la, 56
- inteligencia artificial, 56, 62, 131, 168
- internet, 19, 21, 108, 129, 177, 201
- invariancia, 16, 69, 183

- noción de, 184
- propiedad de, 183
- Kepler, Johannes, 211–214
  - Mysterium Cosmographicum*, 212
- KGB, 42
- L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, 21
  - código, 181
- lema
  - definición de, 80
- lenguaje formal, 60, 62
- lingüística, 57
- límite
  - concepto de, 121
- línea, 90
- línea recta, 90
- lógica, 56, 62, 66, 117, 177, 178
- mariquita, 180, 181
- matematicismo pitagórico, 168
- matemáticas
  - aprendizaje de las, 133
  - asuntos de género en las, 52
  - definición de, 74
  - filosofía de las, 214
  - fundamentos de las, 66
  - historia de las, *véase bajo* historia de las matemáticas
  - impacto cultural de las, 25
  - la verdad en, 215
  - obra maestra en, 71
  - príncipe de las*, 68, 107, 188
  - significación cultural de las, 46
  - tentación mística en las*, 30
- Mathematical Reviews*, 53
- máximo factor común, 111
- mecanicismo, 65
- Medalla Fields, *véase* Fields, Medalla
- media aritmética, 16, 69, 153, 154, 156–161, 163, 164
- media armónica, 157, 158, 160, 161, 166
- media geométrica, 16, 69, 153–161, 168
- medias pitagóricas, 16, 161
- Mesopotamia, 36, 72, 78
- metafísica, 29
  - colapso de la, 63
- Metafísica* (Aristóteles), 117
- método de los límites, 119
- método de los mínimos cuadrados, 107
- misoginia, 50, 55
- misticismo, 28, 30, 40, 148, 149, 189
- monocordio, 163, 165, 234
- música, 16, 69, 100, 161, 162, 165, 168, 169
  - conceptos básicos de la, 162
  - perspectiva geométrica de la, 163
  - teoría de la, 161
- música académica, 168
- música barroca, 165
- música clásica, 168
- música generativa, 168
- música griega antigua, 165
- música occidental, 165, 168
- música tonal, 164, 165, 167, 168
- musicología, 165
- neuronas, 89
- numerales, 84, 179
  - romanos, 180
- numerología, 150
- números irracionales, 12, 16, 17, 88, 119, 125, 139, 143, 149, 165
- números primos, 18, 70, 86, 87, 169, 171–179, 182

- la soledad de, 178
- primos gemelos, 177, 178
- números racionales, 12, 13, 15, 87, 88, 107, 109–111, 120, 124, 125, 139–143, 146, 162
- denominador, 109, 112
- el 0 es también un número
- racional, 88
- fracción irreducible, 68, 110–112
- numerador, 109
- números
  - sentido de los, 93–95, 104, 153
- OCDE, 235
- octaedro, 190, 191, 196, 210, 212
- octava, 163–166
- Overleaf, 21
- Palacio de Minería, 51
- palanca, principio de la, 221, 228, 231
- perspectiva médica humoral, 194
- PGF/TikZ, 21
- Pirámide de Guiza, 156
- Pitágoras, 15, 161, 165
  - escuela de, 149
  - teorema de, 16, 129–138, 145, 147, 156, 224
- placer estético, 85
- plano, 90
- plano euclidiano, 185
- platonistas, 189
- Poincaré, 34, 75
  - conjetura de, 41, 42, 129, 131, 132
- poliedro, 90, 91, 207–209
- poliedros regulares convexos, 18, 70, 189–194, 196, 199, 211
- polígono, 91, 134, 147, 183
- postulado de las paralelas, 91, 92, 186, 187
- PrimeGrid, 177, 178
- principio de autoridad, 29, 30
- principio de no contradicción, 116, 117
- Principios matemáticos de la filosofía natural*, 49, 64
- Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, 235
- punto, 90
- quebrados, 109
- quinta perfecta (o quinta justa), 18
- racionalismo, 29, 35, 63–65
- racionalismo moderno, 198
- razonamiento abstracto, 12, 24, 135
- razonamiento deductivo, 35, 78, 80, 155, 214
- razonamiento hipotético-deductivo, 11, 17, 29, 35, 45, 46, 69, 71, 77, 79, 81, 82, 120, 133, 136, 231, 237
- razonamiento matemático, 12, 13, 54, 64, 73, 77, 93, 94, 229
- Razón
  - Era de la, 14
- realismo matemático, 150, 189
- revolución científica, 16, 17
- Revolución francesa, 14
- Romanticismo, 36, 38, 219, 220
- RSA (encriptamiento), 178
- Sacro Imperio Romano-Germánico, 120
- SARS-CoV-2, 7–9, 26
- Saturno, 212

- anillos de, 55
- Segunda Guerra Púnica, 37
- semántica formal, 60–62, 81
- series de Fourier, 53
- SETI, 177
- Siglo de las Luces, 14, 63, 220
- sistema formal, 57, 81
- sistemas
  - teoría de, 57
- sistemas abstractos, 59
- sistemas conceptuales, 59, 60
- sistemas concretos, 59
- Sociedad Estadounidense de
  - Matemáticas, 53
- Sociedad Europea de Matemáticas, 19
- Sociedad Matemática Mexicana, 53
- sólidos de rotación, 222
- tablilla Plimpton 322, 136
- Tales
  - teorema de, 16, 155, 156
- tentación mística, 24, 28–30, 149
- teología, 64
- teorema
  - definición de, 80
- teorema de Cauchy-Kovalévskaya, 55
- teorema del buen ordenamiento, 115
- teorema fundamental de la
  - aritmética, 18, 70, 171, 173, 176, 177
- teoría de categorías, 200, 202
- teoría de Galois, 38
- teoría de grafos, 18, 199–201, 207, 214
- teoría de números, 171
- teoría de redes, 53
- teoría matemática del cómputo, 179
- teoría sociológica de campos, 31
- tetraedro, 190, 191, 196, 210, 212
- tetraktys*, 14, 15
- T<sub>E</sub>X, 21
- The Doors, 169
- tikz-3dplot, 21
- topología, 41, 50, 131, 132, 202
- triángulo, 18, 70, 155, 156, 183, 184, 222–224
  - euclidiano, 185, 186
  - rectángulo, 16, 69, 120, 122, 129–131, 134, 155, 156
  - isósceles, 16, 69, 139, 144, 145
- triángulos semejantes, 223
- unión de conjuntos, 86, 89
- Universidad de Saint Andrews, 54
- Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 43, 51, 53, 54
  - Escuela Nacional de Ciencias Físico-Matemáticas de la, 51
  - Facultad de Ciencias de la, 51
  - Facultad de Ingeniería de la, 51
  - Instituto de Física de la, 53
- vacuna Patria, 8
- vértice, 90, 91, 183, 185
- Wikipedia, 19, 108
- zeitgeist*, 199

## Índice onomástico

- Abu Ya'far Abdallah ibn  
Muhámmad al-Mansur (País de  
Sham; 712-Bir Maimun; 7 de  
octubre de 775), 84
- Affleck, Ben (Berkeley, California,  
Estados Unidos; 15 de agosto de  
1972), 108
- al-Khwārizmī, Muḥammad ibn  
Mūsā (se estima que vivió entre  
los años 780 y 850 de nuestra  
era), 72
- Aldrin, Buzz (Glen Ridge, Nueva  
Jersey, Estados Unidos de  
America; 20 de enero de 1930),  
16
- Allais, Maurice (París, Francia; 31  
de mayo de 1911-Saint-Claud,  
Francia; 9 de octubre de 2010),  
61
- Aquino, Tomás de (Roccasecca,  
Italia, 1224/1225-Abadía de  
Fossanova, 7 de marzo de 1274),  
64
- Aristóteles (Estagira; 384  
a.C.-Calcis; 322 a.C.), 63, 117,  
165
- Aronofsky, Darren (Brooklyn,  
Nueva York, Estados Unidos; 12  
de febrero de 1969), 149
- Arquímedes (Siracusa, Sicilia; *ca.*  
287 a.C.-*ibidem*, *ca.* 212 a.C.), 18,  
19, 34, 35, 37, 38, 70, 72, 121, 147,  
217, 218, 220-229, 231, 238
- Büttner, J. G., 99
- Babbage, Charles (Teignmouth,  
Devonshire, Gran Bretaña; 26 de  
diciembre de 1791-Londres,  
Inglaterra; 18 de octubre de  
1871), 49
- Bach, Johann Sebastian (Eisenach,  
Alemania; 31 de marzo  
1685-Leipzig; 28 de julio de  
1750), 165, 169
- Bach, Karen (Lyon, Francia; 17 de  
enero de 1973-Paris, Francia; 28  
de enero de 2005), 48
- Bolyai, Farkas (Seica Mare,  
Rumanía; 9 de febrero de  
1775-Târgu Mureș, Rumanía; 20  
de noviembre de 1856), 187, 188
- Bolyai, János (Kolozsvár, Rumanía;  
15 de diciembre de 1802-Târgu  
Mureș, Rumanía; 27 de enero de  
1860), 187, 188
- Bourdieu, Pierre (Denguin, Francia;  
1 de agosto de 1930-París,  
Francia; 23 de enero de 2002), 31,  
85
- Brahe, Tycho (Castillo de  
Knudstrup, Escania; 14 de

- diciembre de 1546–Praga; 24 de octubre de 1601), 213
- Buck, Detlev (Alemania; 1 de diciembre de 1962), 106
- Buda Gautama (Ciudad de Lumbini, Reino de Sakia, Nepal; *ca.* 563-483 a.C.–Ciudad de Kushinagar, Uttar Pradesh, India; *ca.* 483-368 a.C.) – según la tradición budista, 229
- Carlton, Christopher E., 179
- Chevalier, Augusto (Limoges, Francia; 26 octubre de 1809–París, Francia; 26 de noviembre de 1868), 38
- Cicerón, Marco Tulio (Arpino, Imperio romano; 3 de enero de 106 a.C.–Formia, Imperio romano; 7 de diciembre de 43 a.C.), 217
- Connes, Alain (Draguignan, Francia; 1 de abril de 1947), 76
- Costanzo, Saverio (Roma, Italia; 28 de septiembre de 1975), 179
- Cox, Randel Tom, 179
- Ctesibio (Alejandría, Egipto; 284 a.C.–Alejandría, Egipto; 221 a.C.), 169
- da Vinci, Leonardo (Vinci, Italia; 15 de abril de 1452–Amboise, Francia; 2 de mayo de 1519), 213
- Damon, Matt (Massachusetts, Estados Unidos; 8 de octubre de 1970), 108
- de Aquino, Tomás (*véase bajo* Aquino, Tomás de), 64
- de Arezzo, Guido (Arezzo, Gran Ducado de Toscana; 991/992–Monasterio de Fonte Avellan, Italia; después de 1033), 167
- Dedekind, Julius Wilhelm Richard (Braunschweig, Ducado de Brunswick; 6 de octubre de 1831–Braunschweig, Imperio Alemán; 12 de febrero de 1916), 141, 146
- Demócrito (Abdera, Tracia, *ca.* 460 a.C.–*ca.* 370 a.C.), 177
- Descartes, René (La Haye en Touraine, Francia; 31 de marzo de 1596–Estocolmo, Suecia; 11 de febrero de 1650), 63, 197, 198
- Despentès, Virginie (Nancy, Francia; 13 de junio de 1969), 47
- Diaconus, Paulus (Cividale del Friuli, Italia; hacia 720–Montecassino, Italia; hacia 799), 167
- Dostoyevski, Fiódor Mijáilovich (Moscú, Imperio ruso; 11 de noviembre de 1821–San Petersburgo, Imperio ruso; 9 de febrero de 1881), 55
- du Châtelet, Émilie (París, Francia; 17 de diciembre de 1706–Lunéville, Francia; 10 de septiembre de 1749), 49
- Duque Dan de Zhou, 133
- d'Arrest, Heinrich Louis (Berlín, Reino de Prusia; 13 de julio de 1822–Copenhague, Dinamarca; 13 de junio de 1875), 212
- Eco, Umberto (Alessandria, Italia; 5 de enero de 1932–Milán, Italia; 19 de febrero de 2016), 147
- Eilenberg, Samuel (Varsovia, Polonia; 30 de septiembre de

- 1913-Nueva York, Estados Unidos; 30 de enero de 1998), 202
- Einstein, Albert (Ulm, Alemania; 14 de marzo de 1879-Nueva Jersey, Estados Unidos; 18 de abril de 1955), 188
- Elias, Norbert (Breslavia, Polonia; 22 de junio de 1897-Ámsterdam, Países Bajos; 1 de agosto de 1990), 31
- Eno, Brian (Woodbridge, Suffolk, Inglaterra; 15 de mayo de 1948), 168
- Euclides (*fl.* 300 a.C.), 12, 70, 89, 103, 120, 155, 165, 171, 176, 186, 187, 197, 198, 214
- Euler, Leonhard (Basilea, Suiza; 15 de abril de 1707-San Petersburgo, Imperio ruso; 18 de septiembre de 1783), 34, 201
- Fermat, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne, Francia; 17 de agosto de 1601-Castres, Francia; 12 de enero de 1665), 34, 78
- Galilei, Galileo (Pisa, Toscana; 15 de febrero de 1564-Arcetri, Toscana; 8 de enero de 1642), 63, 198
- Galle, Johann Gottfried (Radis, Sajonia-Anhalt; 9 de junio de 1812-Potsdam, Brandeburgo; 10 de julio de 1910), 212
- Galois, Évariste (Bourg-la Reine, Francia; 25 de octubre de 1811-París, Francia; 31 de mayo de 1832), 38
- Galton, Francis (Sparkbrook, Birmingham; 16 de febrero de 1822-Haslemere, Surrey; 17 de enero de 1911), 46
- Gardner, Howard Earl (Scrantomn, Pensilvania, Estados Unidos de América; 11 de julio de 1943), 46
- Gauss, Carl Friedrich (Brunswick, Alemania; 30 de abril de 1777-Gotinga, Alemania; 23 de febrero de 1855), 34, 38, 52, 64, 68, 99, 101, 104-107, 171, 188
- Germain, Sophie (París, Francia; 1 de abril de 1776-París, Francia; 27 de junio de 1831), 52
- Giordano, Paolo (Turín, Italia; 19 de diciembre de 1982), 178
- González Baz, Enriqueta (Ciudad de México; 22 de septiembre de 1915-Ciudad de México; 22 de diciembre de 2002), 51  
primera matemática profesional en México, 53
- Grothendieck, Alexandre (Berlín, Estado Libre de Prusia; 28 de marzo de 1928-Saint-Girons, Ariège, Francia; 13 de noviembre de 2014), 39, 40, 76
- Grómov, Mijaíl Leonídovich (Boksitogorsk, URSS; 23 de diciembre de 1943), 41
- Hein, Jeffrey D., 21
- Hemiunu (*fl.* 2570 a.C.), 156
- Herschel, William (Hannover, Electorado de Brunswick-Luneburgo; 15 de noviembre de 1738-Slough, Inglaterra; 25 de agosto de 1822), 212

- Hilbert, David (Königsberg, Prusia Oriental; 23 de enero de 1862-Gotinga, Alemania; 14 de febrero de 1943), 41, 219
- Hipatia, (Alejandría; 355 o 370-*ibidem*; marzo de 415 o 416), 49
- Hipócrates (Cos, Grecia; ca. 460 a.C.-Tesalia, Grecia; ca. 370 a.C.), 194
- Humboldt, Alexander von (Berlín, Prusia; 14 septiembre de 1769-6 de mayo de 1859; Berlín, Prusia), 106
- Hípaso de Metaponto (vivió a lo largo del siglo v antes de nuestra era), 125
- Jaclard, Anna (Vitebsk, Imperio ruso; 6 de octubre 1843-París, Francia; 11 de octubre de 1887), 55
- Jacobi, Carl Gustav Jakob (Potsdam, Prusia; 10 de diciembre de 1804-Berlín, Alemania; 18 de febrero de 1851), 38
- Johnson Pell Wheeler, Anna (Calliope, Iowa, Estados Unidos; 5 de mayo de 1883-Bryn Mawr, Pennsylvania, Estados Unidos; 26 de marzo de 1966), 53
- Kant, Immanuel (Königsberg, Prusia; 22 de abril de 1724-*ibidem*; 12 de febrero de 1804), 63, 215
- Kehlmann, Daniel (Alemania; 13 de enero de 1975), 106
- Keops (Egipto Antiguo; hacia el siglo xxvi antes de nuestra era), 156
- Kepler, Johannes (Weil der Stadt, Alemania; 27 de diciembre de 1571-Ratisbona, Alemania; 15 de noviembre de 1630), 211-214
- Knill, Oliver, 108
- Knuth, Donald Ervin (Milwaukee, Wisconsin, Estados Unidos; 10 de enero de 1938), 21
- Kolmogorov, Andrey (Tambov, Rusia; 25 de abril de 1903-Moscú, Rusia; 20 de octubre de 1987), 34
- Kovalévskaya, Sofia (Moscú, Imperio ruso; 15 de enero de 1850-Estocolmo, Suecia; 10 de febrero de 1891), 54, 55
- Kuhn, Thomas Samuel (Cincinnati, Ohio, Estados Unidos; 18 de julio de 1922-Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos; 17 de junio de 1996), 17
- Lambert, Johann Heinrich (Suiza; 26 de agosto de 1728-Berlín, Prusia; 25 de septiembre de 1777), 147
- Lamport, Leslie (Nueva York, Estados Unidos; 7 de febrero de 1941), 21
- Laplace, Pierre-Simon (Beaumont-en-Auge, Normandía, Francia; 23 de marzo de 1749-París, Francia; 5 de marzo de 1827), 55
- Le Verrier, Urbain (Saint Lô, Francia; 11 de marzo de 1811-París, Francia; 23 de septiembre de 1877), 212
- Lefschetz, Solomon (Moscú, Imperio ruso; 3 de octubre de

- 1972-Princeton, Nueva Jersey, Estados Unidos; 5 de octubre de 1972), 54
- Legendre, Adrien-Marie (París, Francia; 18 de septiembre de 1752-París, Francia; 9 de enero de 1833), 107
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (Leipzig; 1 de julio de 1646-Hannover; 14 de noviembre de 1716), 121, 149, 197, 228
- Leucipo de Mileto (siglo v a.C.), 177
- Lobachevski, Nikolái Ivánovich (Nizhny Novgorod, Rusia; 1 de diciembre de 1792-Kazán, Rusia, 24 de febrero de 1856), 188
- Lovelace, Ada (Londres, Inglaterra; 10 de diciembre de 1815-Londres, Inglaterra; 27 de noviembre de 1852), 49
- Mac Lane, Saunders (Connecticut, Estados Unidos; 4 de agosto de 1909-San Francisco, California, Estados Unidos; 14 de abril de 2005), 202
- Manzarek, Raymond Daniel (Chicago, Estados Unidos; 12 de febrero de 1939-Rosenheim, Alemania; 20 de mayo de 2013), 169
- Marcus Claudius Marcellus (268 a.C.-208 a.C.), 37
- Markus, Mario (Santiago de Chile; 29 de julio de 1944), 179
- Martínez Silva, Julia Anaïs (Nantes, Francia; 21 de agosto de 1994), 20
- Martínez Silva, Val (Ciudad de México; 3 de mayo de 1998), 20
- Marx, Karl Heinrich (Tréveris, Reino de Prusia; 5 de mayo de 1818-Londres, Reino Unido; 14 de marzo de 1883), 55
- Menke, Henri, 21
- Mirzakhani, Maryam (Teherán, Irán; 12 de mayo de 1977-Stanford, California, Estados Unidos; 14 de julio de 2017), 50
- Morrison, James Douglas (Melbourne, Estados Unidos; 8 de diciembre de 1943-París, Francia; 3 de julio de 1971), 169
- Newton, Isaac (Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra; 25 de diciembre de 1642jul./ 4 de enero de 1643greg.-Kensington, Londres, Inglaterra; 20 de marzojul./ 31 de marzo de 1727greg.), 34, 35, 49, 64, 65, 121, 181, 213, 228
- Noether, Amalie Emmy (Erlangen, Baviera, Imperio alemán; 23 de marzo de 1882-Bryn Mawr, Pensilvania, Estados Unidos de América; 14 de abril de 1935), 49
- Oughtred, William (Eton, Buckinghamshire, Inglaterra; 5 de marzo de 1574-Albury, Surrey, Inglaterra; 30 de junio de 1660), 147
- Pacioli, Luca (Sansepolcro, Italia; *ca.* 1445-1517), 213
- Pantaloni, Vincent, 222
- Pascal, Blaise (Clermont Ferrand; 19 de junio de 1623-París,

- Francia; 17 de agosto de 1662), 34, 121
- Perelmán, Grigori (nacido el 13 de junio de 1966 en Leningrado, URSS; actualmente San Petersburgo, Rusia), 34, 40-42, 129
- Pitágoras (Samos, Grecia; hacia 570 a.C.-Metaponto, Magna Grecia; hacia 495 a.C.), 15, 125, 129, 156, 161
- Platón (Atenas o Egina; *ca.* 427-347 a.C.; Atenas), 70, 72, 97, 117, 165, 183, 189, 192, 194, 213, 214
- Plutarco (Beocia, Grecia, Imperio romano; 46 d.C.-Delfos, Grecia, Imperio romano, hacia el año 119 d.C.), 37, 70, 217
- Poincaré, Henri (Nancy, Francia; 29 de abril de 1854-París, Francia; 17 de julio de 1912), 34, 41, 75
- Putin, Vladímir (Leningrado, URSS; 7 de octubre de 1952), 42
- Pérez Botija, Rafael (Madrid, España; 26 de octubre de 1949), 44
- Recorde, Robert (c. 1512-1558), 100
- Rhind, Alexander Henry (Wick, Reino Unido; 26 de julio de 1833-Cadenabbia, Italia; 3 de julio de 1863), 147
- Ries, Adam (Bad Staffelstein, Alemania; 17 de enero de 1492-Annaberg, Alemania; 30 de marzo de 1559), 120
- Rimbaud, Arthur (Charleville, Francia; 20 de octubre de 1854-Marsella, Francia; 10 de noviembre de 1891), 19, 230, 231
- Robert, Louis Nicolas (París, Francia; 2 de diciembre de 1761-Vernouillet, Francia; 8 de agosto de 1828), 114
- Rudolff, Christoff (Jawor, Silesia; 1499-Viena; 1545), 120
- Russell, Bertrand Arthur (Trellech, Monmouthshire, Gales, Reino Unido; 18 de mayo de 1872-Penrhynedeudraeth, Gwynedd, Gales, Reino Unido; 2 de febrero de 1970), 66
- Sagan, Carl (Nueva York; 9 de noviembre de 1934-Seattle, 20 de diciembre de 1996), 149, 211
- Sant, Gus van (Kentucky, Estados Unidos; 24 de julio de 1952), 108
- Schapiro, Alexander "Sascha" (Novozybkov, Imperio ruso; 11 de octubre de 1889-campo de exterminio de Auschwitz-Birkenau; 1 de agosto de 1942), 39
- Schwartz, Laurent (París, Francia; 5 de marzo de 1915-París, Francia; 4 de julio de 2002), 76
- Serre, Jean-Pierre (Bages, Francia; 15 de septiembre de 1926), 76
- Shang Gao, 133
- Sosa Ortiz, José Rómulo (Azcapotzalco, Ciudad de México; 17 de Febrero de 1948-Homestead, Florida, Estados Unidos; 28 de Septiembre de 2019), 44
- Strindberg, Johan August (Estocolmo, Suecia; 22 de enero de 1849-Estocolmo, Suecia; 14 de mayo de 1912), 55

- Strogatz, Steven (Torrington, Connecticut, Estados Unidos; 13 de agosto de 1959), 148
- Tales (Mileto, Asia Menor; hacia 625-620 a.C.-*ibidem*, hacia 548-545 a.C.), 78, 79, 155, 156
- Tantau, Till (Berlín, Alemania; 1975), 21
- Trinh Thi, Coralie (París, Francia; 11 de abril de 1976), 47
- Turing, Alan Mathison (Londres, Inglaterra; 23 de junio de 1912-Wilmslow, Inglaterra; 7 de junio de 1954), 179
- Varignon, Pierre (Caen, Francia; 1654-París, Francia; 23 de diciembre de 1722), 121
- Viazovska, Maryna (Kiev, Unión Soviética; 2 de diciembre de 1984), 51
- Voltaire (François-Marie Arouet) (París, Francia; 21 de noviembre de 1694-París, Francia; 30 de mayo de 1778), 49, 65
- Waltershausen, Wolfgang Sartorius von (Gotinga, Reino de Westfalia; 17 de diciembre de 1809-16 de marzo de 1876 o 16 de octubre de 1876; Gotinga, Imperio alemán), 101, 104, 105, 107
- Weber, Max (Erfurt, Alemania; 11 de abril de 1864-Múnich, Alemania; 14 de junio de 1920), 33
- Weierstrass, Karl (Ennigerloh, Reino de Prusia; 31 de octubre de 1815-Berlín, Prusia, Imperio Alemán; 19 de febrero de 1897), 55
- Wiles, Andrew (Cambridge, Inglaterra; 11 de abril de 1953), 78, 215
- Williams, Robin (Illinois, Estados Unidos; 21 de julio de 1951-California, Estados Unidos; 11 de agosto de 2014), 108
- Wittgenstein, Ludwig Josef Johann (Viena, Austria; 26 de abril de 1889-Cambridge, Inglaterra; 29 de abril de 1951), 150, 215
- Yoccoz, Jean-Christophe (París, Francia; 29 de mayo de 1957-París, Francia; 3 de septiembre de 2016), 76
- Zemeckis, Robert (Chicago; 14 de mayo de 1952), 149



# Índice general

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| Introducción                                                  | 7  |
| ¿A qué público está dirigido este libro?                      | 9  |
| Entrando en materia                                           | 10 |
| Verificabilidad de lo que se expone                           | 11 |
| Sobre el título de este libro                                 | 12 |
| Aspectos técnicos                                             | 13 |
| ¿Por qué diez teoremas?                                       | 14 |
| Fuentes bibliográficas y ligereza en la exposición            | 19 |
| Motivación                                                    | 23 |
| Las matemáticas y su impacto cultural                         | 25 |
| El misticismo en la significación cultural de las matemáticas | 28 |
| Sociología de la relación entre matemáticas y cultura         | 31 |
| Pasiones excéntricas                                          | 36 |
| La muerte de Arquímedes                                       | 37 |
| El misterioso duelo de Évariste Galois                        | 38 |
| El militanismo de Alexandre Grothendieck                      | 39 |
| La ética sin concesiones de Grigori Perelmán                  | 40 |
| Deslices matemáticos del imaginario social                    | 44 |
| La insoportable exclusión de las mujeres                      | 47 |
| Mi intención                                                  | 54 |
| Matemáticas y sistemas formales                               | 56 |
| Significación cultural de las matemáticas                     | 61 |
| El poder simbólico de las matemáticas                         | 64 |
| Las matemáticas: terreno de juego del razonamiento            | 67 |
| Los diez teoremas elegidos                                    | 68 |
| Teorema 1                                                     | 68 |

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Teorema 2                                                                                                               | 68  |
| Teorema 3                                                                                                               | 68  |
| Teorema 4                                                                                                               | 69  |
| Teorema 5                                                                                                               | 69  |
| Teorema 6                                                                                                               | 69  |
| Teorema 7                                                                                                               | 70  |
| Teorema 8                                                                                                               | 70  |
| Teorema 9                                                                                                               | 70  |
| Teorema 10                                                                                                              | 70  |
| Conceptos preliminares                                                                                                  | 73  |
| Matemáticas y conocimiento matemático                                                                                   | 73  |
| El razonamiento matemático                                                                                              | 77  |
| Métodos de demostración de las declaraciones matemáticas                                                                | 81  |
| Números                                                                                                                 | 84  |
| Algunos conceptos geométricos                                                                                           | 89  |
| Teorema 1. La suma de los primeros $n$ números enteros naturales es<br>igual a la mitad del producto de $n$ por $n + 1$ | 93  |
| Extendiendo la declaración                                                                                              | 105 |
| Johann Carl Friedrich Gauss y la cultura de masas                                                                       | 106 |
| Teorema 2. Todo número racional se puede expresar como una frac-<br>ción irreducible                                    | 109 |
| La utilidad de suponer lo absurdo                                                                                       | 116 |
| Teorema 3. La raíz cuadrada del número 2 no es un número<br>racional                                                    | 119 |
| La edificación sin fin de lo matemático                                                                                 | 124 |
| Teorema 4. En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los<br>catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa      | 129 |
| El teorema de Pitágoras en lenguaje llano                                                                               | 134 |
| Teorema 5. El cociente hipotenusa/cateto en todo triángulo rectán-<br>gulo isósceles es igual a $\sqrt{2}$              | 139 |
| ¿Qué es un número real?                                                                                                 | 140 |

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\sqrt{2}$ y la geometría                                                                             | 143 |
| Belleza y misticismo                                                                                  | 148 |
| Teorema 6. La media geométrica de dos números positivos es menor<br>o igual a su media aritmética     | 153 |
| La media armónica                                                                                     | 157 |
| Las medias pitagóricas y la música                                                                    | 161 |
| Más allá de la quinta perfecta                                                                        | 166 |
| Matemáticas y música hoy en día                                                                       | 168 |
| Teorema 7. La factorización en números primos de un número na-<br>tural existe y es además única      | 171 |
| Los números primos en el imaginario social                                                            | 177 |
| Teorema 8. La suma de los ángulos de todo triángulo en geometría<br>euclidiana es igual a $180^\circ$ | 183 |
| El hijo desobediente                                                                                  | 187 |
| Teorema 9. Sólo existen 5 poliedros regulares convexos                                                | 189 |
| ¿Cómo sabía Platón que sólo existen cinco poliedros regulares<br>convexos?                            | 192 |
| La argumentación de Euclides                                                                          | 195 |
| Breviario de teoría de grafos                                                                         | 200 |
| El dislate geométrico de Johannes Kepler                                                              | 211 |
| Teorema 10. Una esfera tiene dos tercios del volumen del cilindro<br>en que se inscribe               | 217 |
| Demostración carente de elegancia                                                                     | 228 |
| Percepción de la realidad y razonamiento matemático                                                   | 229 |
| Comentarios finales                                                                                   | 233 |
| Bibliografía recomendada                                                                              | 235 |
| Génesis del pensamiento matemático                                                                    | 236 |
| Métodos de demostración                                                                               | 237 |
| Demostraciones visuales                                                                               | 238 |
| Tratados de Euclides y de Arquímedes                                                                  | 238 |
| París, capital mundial de las matemáticas                                                             | 239 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| Matemáticas fuera de Occidente                | 239 |
| Sobre los poliedros                           | 239 |
| Reflexión filosófica en la Antigua Grecia     | 240 |
| Notación matemática                           | 240 |
| Matemáticas en las humanidades y en las artes | 240 |
| Matemáticas y género                          | 241 |
| En defensa de las matemáticas                 | 241 |
| Semblanza del autor                           | 243 |
| Índice de figuras                             | 245 |
| Índice de recuadros                           | 247 |
| Índice de materias                            | 249 |
| Índice onomástico                             | 255 |

*10 teoremas para estimular tu creatividad*  
se terminó de editar en 2024

La edición estuvo al cuidado de la Dirección de Difusión Científica  
del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías.  
Para su formación se utilizaron las familias GMX, Montserrat  
y T<sub>E</sub>X Gyre Pagella Math.

Este libro constituye un ensayo de divulgación científica en el que se exploran diez teoremas matemáticos famosos desde distintas perspectivas. Más que una exposición técnica, Juan Carlos Martínez García invita a los lectores a abordar los capítulos como un desafío matemático a resolver. Además, cada teorema se sitúa en su contexto histórico y matemático, lo que ayuda a desmitificar su complejidad y a facilitar su comprensión. Finalmente, el libro ofrece reflexiones ensayísticas que vinculan estos teoremas con las circunstancias socioculturales, históricas e incluso psicológicas que influyen en la construcción del conocimiento.



GOBIERNO DE  
**MÉXICO**



**CONAHCYT**  
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES  
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

